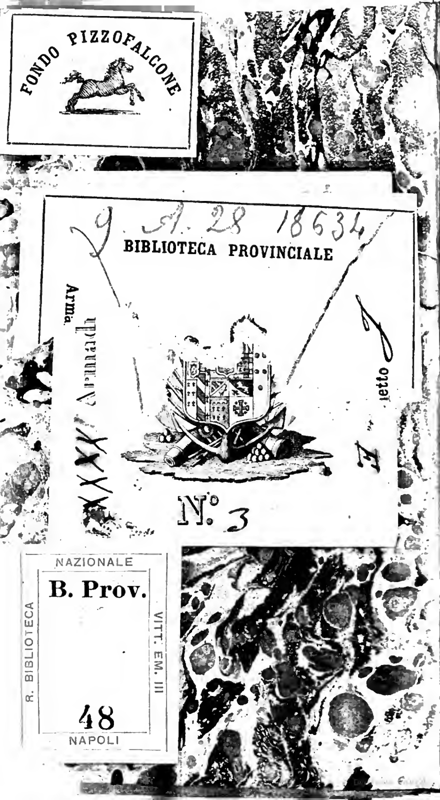

FONDO PIZZOFALCONE
9. A. 28 18634
BIBLIOTECA PROVINCIALE
Arma.
N.° 3
NAZIONALE
B. Prov.
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
48
NAPOLI

ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES,
OU
TRAITÉ
DE LA GRANDEUR EN GENERAL,

Qui comprend

L'ARITHMETIQUE, L'ALGEBRE, L'ANALYSE,

Et les principes de toutes les Sciences qui ont la grandeur pour objet.

Par le R. P. BERNARD LAMY, *Prêtre de l'Oratoire.*

Huitiéme Edition, revue & corrigée.

A PARIS,
Chez DESPILLY, Libraire, rue S. Jacques, à la Croix d'Or.

M. DCC. LXV.
AVEC PRIVILEGE DU ROI.

PREFACE.

LES Peres de l'Eglise jugeoient l'étude des Lettres humaines si néceſſaire, qu'ils regarderent la défenſe que Julien l'Apoſtat fit aux Chrétiens de les étudier, comme un ſtratagême du démon, ſemblable à celui dont ſe ſervirent les Philiſtins pour ôter aux Iſraélites les moyens de ſe défendre, en les empêchant de faire aucun ouvrage de fer. Les Mathématiques tenant donc entre les Sciences humaines un des premiers rangs, l'on ne peut pas, ſous prétexte de piété, en défendre l'étude à la Jeuneſſe. Elles ſont nommées Mathématiques, nom qui veut dire Diſcipline, parce que l'on n'apprend rien de plus conſidérable dans les Écoles, & qu'elles enferment tant de choſes, qu'il n'y a point de Profeſſion à qui elles ne puiſſent être utiles. L'Arithmétique, l'Algebre, la Géométrie, l'Aſtronomie, la Chro-

nologie, la Gnomonique, l'Arpentage, l'Architecture, les Fortifications, la Marine, la Musique, la Perspective, la Dioptrique, la Catoptrique, les Méchaniques, plusieurs Traités de Physique, en sont les parties. Elles sont les Élémens de presque toutes les Sciences; & les Arts ne se peuvent passer de leur secours. De sorte que puisqu'il faut reconnoître avec les Peres de l'Eglise la nécessité d'appliquer les jeunes gens aux Lettres humaines, il n'y a que ceux qui ignorent les Mathématiques, qui puissent dire que ce seroit leur faire perdre le tems, que de les leur faire étudier; vû que l'Histoire Ecclésiastique donne de si grandes louanges aux Peres de l'Eglise qui ne les ont pas ignorées. Mais ceux qui en jugent si mal ne le font sans doute que par un bon zele: parce qu'ils croyent qu'elles ne peuvent être utiles. Ainsi il est juste qu'on leur fasse voir dans la Préface de cet Ouvrage, par lequel on prétend ouvrir un cours de Mathématiques, l'utilité qu'on peut retirer de l'étude qu'on conseille ici.

Tout le monde reconnoît que l'on ne remporte que très-peu de fruit des Colleges, & que l'on y passe le tems à ap-

prendre des choſes, particuliérement dans la Philoſophie, dont il n'eſt pas même permis de faire uſage parmi les honnêtes gens, comme ſont une infinité de Queſtions de chicane. Il eſt vrai que l'on dit que ces choſes ont leur utilité, en ce qu'elles font l'eſprit, & qu'elles le rendent ſubtil, étendu, & capable de raiſonner. Mais ſi c'eſt cette ouverture, cette étendue d'eſprit, & cette diſpoſition à bien raiſonner, que l'on regarde dans les premieres études des jeunes gens, comme on le doit faire; l'étude des Mathématiques devroit être plus ordinaire qu'elle ne l'eſt, quand il ne ſeroit pas vrai d'ailleurs qu'il n'y a aucune Profeſſion à laquelle elles ne ſoient utiles. Car enfin perſonne ne doute que la Philoſophie, comme on l'enſeigne, ne ſoit pleine de queſtions douteuſes, de ſophiſmes, de mauvais raiſonnemens, & qu'ainſi elle ne peut fournir que des modeles très-imparfaits de clarté, de netteté & d'exactitude. Ce que l'on ne peut pas dire des Mathématiques, qui n'admettent aucun principe dont la vérité ne ſoit manifeſte. Elles ne ſe contentent pas de probabilités; elles démontrent toutes les propoſitions dont la vérité eſt un peu cachée, ne

a iij

ſe ſervant point de paroles ambiguës, ni de vaines ſubtilités, mais de paroles claires, de raiſonnemens ſolides & exempts de toutes erreurs; ainſi elles ſont bien plus propres à exercer & à former l'eſprit, que la Philoſophie. Ceux qui ont vû pluſieurs excellens Originaux ſçavent bien mieux juger d'un tableau. Ceux auſſi qui ſont accoutumés à des principes clairs & à des démonſtrations exactes jugent bien mieux de la clarté & de l'exactitude d'un raiſonnement. Dans les Mathématiques l'on tire d'un principe connu mille choſes inconnues par un enchaînement merveilleux de pluſieurs propoſitions, ce qui rend encore l'eſprit perçant; & comme ſouvent on y trouve des démonſtrations qu'on ne peut entendre qu'en enviſageant la vérité de cent autres démonſtrations dont elles dépendent, l'étude que l'on fait de cette Science étend l'eſprit, en l'habituant à comprendre d'une ſeule vûe pluſieurs choſes.

Ainſi, qu'on conſidere ſi on veut les études de la Jeuneſſe, ou comme de ſimples occupations dont il faut remplir le vuide de leurs premieres années, afin que le vice ne s'en empare pas; ou comme des préparations à des études plus ſérieuſes:

eſt conſtant que cette conſidération
oit porter les perſonnes qui ont du zele
our l'éducation de la Jeuneſſe, à faire
u'on enſeigne avec plus de ſoin les Ma-
hématiques, qu'on ne l'a fait depuis
uelques ſiecles. Autrefois on y appli-
uoit d'abord les jeunes gens. Les Phi-
oſophes ſuppoſoient que ceux qui en-
roient dans leurs Ecoles n'ignoroient
as ces Sciences, comme il paroît par
ette inſcription qui étoit ſur la porte de
eurs Academies : *Que ceux qui ne ſçavent
as la Géometrie n'entrent point ici.* Platon
nontre très-bien que non-ſeulement elles
ont utiles pour acquerir les Sciences,
nais qu'elles peuvent encore ſervir à
ormer les mœurs. Un des grands princi-
es de corruption pour tous les hommes,
ſt cette forte inclination qu'ils ont pour
es choſes ſenſibles, qui fait que rien ne
eur plaît que ce qui flatte leurs ſens ; qu'ils
e recherchent & qu'ils ne s'appliquent
u'à ce qui fait ſur eux des impreſſions
gréables. Ainſi, comme la Géométrie
ſépare des corps qu'elle conſidere tou-
es les qualités ſenſibles, & qu'elle ne
eur laiſſe rien de ce qui peut plaire à la
oncupiſcence, quand on peut forcer un
ſprit, & obtenir qu'il s'applique à l'étu-

dier, on le détache des sens, & on lui fait connoître & aimer d'autres plaisirs que ceux qui se goutent par leur moyen, ce qui est de la derniere importance.

Il faut avouer néanmoins que ceux qui sont Mathématiciens, ne sont pas toujours exacts dans les raisonnemens qu'ils font sur d'autres matieres que les Mathématiques, & qu'ils n'ont pas moins d'amour pour les plaisirs sensibles, que ceux qui ignorent ces Sciences. C'est pour cela qu'on n'a presque fait aucune attention à ce fruit que l'on peut retirer des Mathématiques, & qu'on ne les a regardées que comme des Sciences curieuses, ou utiles seulement à ceux qui embrassent de certaines Professions; en un mot, c'est ce qui a fait qu'on les a négligées. Mais il ne faut pas juger de leur utilité par le peu d'usage qu'en ont fait ceux dont nous parlons, pour n'avoir pas assez considéré que la fin de toutes nos études doit être de nous former l'esprit & le cœur; & que l'esprit de l'homme n'est pas fait pour les Mathématiques, mais que les Mathématiques sont faites pour lui. C'est sans doute un défaut très-considérable; & pour l'éviter, & tirer toute l'utilité que peut produire l'étude des Mathématiques, il

faut que ceux qui enseignent ces Sciences fassent faire à leurs Disciples toutes les réflexions nécessaires : ils doivent leur apprendre à bien discerner le vrai d'avec le faux, à bien appercevoir ce que c'est qu'un raisonnement juste par la comparaison des choses claires & des démonstrations certaines qu'ils leur proposent ; leur faire remarquer cette belle Méthode que l'on suit dans les Mathématiques pour résoudre une difficulté ; ce soin que l'on a, de définir tous les termes obscurs, afin d'éloigner toutes les disputes de mots ; & cette adresse à tirer de ce qui est connu, des choses si cachées & si difficiles. Il faut qu'en même tems ils leur fassent estimer & aimer toutes ces choses, qui surprennent l'esprit, & qui lui sont agréables, quand il n'est pas rebuté par les difficultés. Enfin, pour me servir d'une expression de S. Grégoire Thaumaturge, ils doivent former dans l'esprit des jeunes gens comme une digue assurée contre l'erreur, les fortifiant & les accoutumant à ne donner leur consentement qu'à ce qui est évident : & détachant leur cœur des plaisirs sensibles, leur en faisant goûter de plus purs. Il n'y a personne qui ait quelque connoissance des Mathématiques

qui n'en ſoit charmé. La vérité y paroît ſans nuage, au lieu que dans les autres Sciences elle y eſt cachée ſous d'épaiſſes ténébres. Elles doivent donc plaire à notre eſprit ; car il n'eſt pas ſi fort corrompu par le menſonge, qu'il ne lui reſte une forte inclination pour la vérité. Il n'y a rien qu'il aime davantage, comme dit S. Auguſtin : *Quid fortiùs deſiderat anima quàm veritatem ?*

Si les Mathématiques ne donnent pas tout le plaiſir dont elles ſont capables, & ſi elles n'attirent pas toutes les perſonnes ſtudieuſes, c'eſt que les épines dont elles ſont environnées rebutent, parce qu'on fuit la peine & le travail. Mais ce n'eſt pas un juſte ſujet de les négliger. Premiérement ces épines, c'eſt-à-dire, la difficulté qu'il y a à comprendre les vérités qu'elles propoſent n'en eſt pas tellement inſéparable, qu'on ne puiſſe dire que ſi les Mathématiques ſont difficiles, c'eſt en partie la faute de ceux qui les ont traitées ; car il ſemble que ceux qui ont écrit dans les ſiécles précédens ne ſe ſoient mis en peine que de convaincre l'eſprit, ſans penſer à l'éclairer. Ce n'eſt pas qu'on puiſſe rendre ces Sciences auſſi aiſées que l'Hiſtoire, que la Poëſie, &

que la Rhétorique, où il n'eſt beſoin pour devenir ſçavant que d'avoir des yeux & des oreilles, dont les Mathématiques demandent en quelque façon qu'on ſe déſaſſe, & que l'on applique ſeulement ſon eſprit; ce qui eſt difficile; parce que, comme nous ſommes faits aujourd'hui, nous ſentons plus volontiers que nous ne concevons; les opérations des ſens étant accompagnées de quelque plaiſir ſenſible qui ne ſe trouve point dans les conceptions ſpirituelles. Mais cela ne doit pas éloigner de l'étude des Mathématiques, il les faut même employer pour vaincre cette délicateſſe, qui fait que l'on ne ſe donne qu'à ce qui eſt facile, & peut cauſer un plaiſir ſenſible. Car comme nous devons de bonne heure endurcir notre corps au travail, & le rendre capable de ſupporter de grandes fatigues, il faut auſſi faire notre eſprit aux travaux ſpirituels, l'accoutumant à concevoir les choſes difficiles, à y donner une entiere attention, à ſuivre le fil d'un raiſonnement pour long qu'il ſoit, & à ne pas ſe rebuter de la multiplicité des choſes qu'il faut conſidérer, pour appercevoir la vérité ou la fauſſeté d'une propoſition. Ceux qui ne ſont accoutumés qu'à des études ſen-

fibles, comme à la Poëfie, deviennent fi tendres & fi délicats, qu'ils ne font pas capables de la moindre application. Ils ne ſçavent ce que c'eft que faire ufage de leur efprit, & un raifonnement de cinq à fix lignes un peu fpirituel leur caffe la tête.

Il ne faut donc pas efpérer que l'on puiffe traiter les Mathématiques d'une maniere agréable à ces perfonnes. On peut bien leur faire voir & toucher les figures; mais il n'y a que le pur efprit qui apperçoive leurs propriétés; ce qui ne fe peut faire fans attention. Cependant fi on ne peut pas rendre les Mathématiques affez aifées pour qu'on les apprenne en jouant, on peut diminuer le travail de cette application qu'il leur faut donner; & c'eft à quoi l'on n'avoit pas travaillé. Je ne veux pas dire que les démonftrations qu'on voit dans les Ouvrages des Anciens manquent du côté de la vérité, puifqu'elles font certaines; mais elles pechent contre la netteté & la clarté, étant trop longues & trop embarraffées. Outre cela, ce qui empêche que les Ouvrages de ces grands Hommes, qui méritent d'ailleurs tant de louanges, n'éclairent auffi vivement l'efprit, qu'ils le

convainquent fortement, c'eſt qu'ils ſe contentent ſeulement de placer les propoſitions qu'ils font, de ſorte que celles qu'ils employent pour une démonſtration, ſe trouvent devant cette démonſtration ſans s'embarraſſer de la ſuite naturelle des idées. Ils ne ſe ſont point aſſujettis à un ordre qui pût conduire le Lecteur de ce qu'il connoît à ce qu'il ne connoiſſoit pas, ſans autre travail que celui d'une attention médiocre. Ce qui arrive infailliblement lorſque les propoſitions ſont rangées naturellement, ſelon qu'elles ſe doivent ſuivre les unes les autres : qu'on ne propoſe en chaque lieu que ce qui appartient à la matiere qui s'y traite ; & qu'enfin on cherche les voies les plus courtes ; car on ſe laſſe dans les plus beaux chemins, quand ils ſont trop longs. Outre qu'un Ouvrage n'eſt pas propre à former l'eſprit, lorſqu'il n'y a point d'ordre, qui eſt ce qu'on cherche & ce qu'on doit trouver dans les Mathématiques. S. Auguſtin nous donne une regle qui nous empêcheroit de tomber dans l'erreur auſſi ſouvent que nous le faiſons, ſi nous la ſuivions. Prenez garde, dit-il, de croire ſçavoir une choſe, ſi vous ne la connoiſſez auſſi clairement que vous ſçavez que

ces nombres, un, deux, trois, quatre, ajoutés dans une fomme font dix. Un Ouvrage de Mathématique doit donc être si exact, & pour la clarté, & pour l'ordre, qu'il serve de modele pour celui que l'on doit suivre dans toutes les Sciences; de sorte que l'esprit s'accoutume, dans cette étude, à s'appliquer aux choses qu'il doit examiner, à discerner la vérité, à la déduire des principes dont elle dépend, d'une maniere suivie. C'est une chose d'un prix infini, & le fruit le plus précieux que nous puissions recueillir de nos premieres études.

Toutes ces considérations sur l'utilité que la Jeunesse peut retirer de l'étude des Mathématiques m'ont porté à travailler à cet Ouvrage, que j'ai tâché de rendre facile, afin qu'il pût donner une entrée dans ces Sciences, & qu'il fût propre à former l'esprit; ce qui a été mon principal dessein. Pour ce qui est de la facilité, je sçai par expérience que pour peu qu'on s'y applique on le peut entendre; & que les jeunes gens, avec le secours d'un Maître, n'y trouveront rien au-dessus de la capacité de leur esprit. Je ne propose d'abord que des propriétés de la Grandeur, si connues, que personne ne les peut

ignorer. Je commence par les nombres, qui ſont la choſe que l'eſprit connoît le plus clairement. Les Démonſtrations ſont courtes ; & c'eſt à quoi j'ai travaillé, parce que je ſçai que l'eſprit des jeunes gens ne peut pas demeurer long-tems attentif ; & par conſéquent qu'il ne peut concevoir les démonſtrations les plus claires lorſqu'elles ſont un peu longues. C'eſt auſſi ce qui m'a fait rechercher celles qui ſont générales, qui étant une fois conçues répandent une grande lumiere dans ce qui ſuit ; de ſorte qu'en un mot, & ſans obſcurité, on peut propoſer & prouver pluſieurs vérités importantes ; ce qui abrege beaucoup. Dans chaque Livre, il n'y a que deux ou trois démonſtrations qui puiſſent arrêter : toutes les autres en ſont des conſéquences qui ſautent aux yeux.

Ce Traité a pour objet la Grandeur en général. *Grandeur* eſt tout ce que l'on conçoit capable du plus ou du moins, c'eſt-à-dire, tout ce qui peut être augmenté par quelque addition, ou qui peut être diminué par quelque retranchement. Ainſi, non-ſeulement l'on renferme ſous le nom de Grandeur, la longueur, la largeur & la profondeur des corps, mais

encore le tems, la pesanteur, la vîtesse, le mouvement, les sons, les autres qualités dans lesquelles on peut distinguer plusieurs degrés, & généralement toutes les choses finies, capables du plus ou du moins. Par conséquent, sous ce nom de Grandeur, on comprend même les spirituelles qui sont finies, puisqu'on peut considérer dans leurs perfections des degrés différens : qu'on les peut concevoir plus ou moins parfaites en elles-mêmes, ou par rapport à d'autres. L'objet des Mathématiques en général est la grandeur prise de la maniere que nous venons de le dire. On en explique les parties dans les Traités particuliers; c'est pourquoi il est assez évident que c'est par un Traité de la Grandeur en général, que l'on doit ouvrir le cours des Etudes des Mathématiques, & que ce Traité doit être considéré comme les Elémens de cette Science. J'ai cru que l'Ouvrage d'Euclide, qu'on appelle les Elémens de Géométrie, n'étoit point si propre à donner cette entrée; car outre qu'il n'y traite que d'une espece particuliere de la Grandeur, qui sont les corps, dont les propriétés sont plus composées & plus difficiles à connoître que celles de la grandeur en

général ; comme il n'y parle que de la mesure des corps, son ouvrage n'est pas si propre pour former l'esprit que celui que je propose. Il est vrai que les corps que l'on considere dans la Géométrie, n'ont ni couleur, ni saveur, ni aucune autre qualité sensible qui puissent flatter les sens; mais enfin ils forment des images, & il arrive tous les jours que ceux qui sont accoutumés aux démonstrations où l'on fait considérer quelque figure ne sont pas capables de concevoir un raisonnement, s'il n'est exprimé par des lignes, & qu'ils ne prennent pour de véritables démonstrations que celles que l'on peut rendre ainsi sensibles par des figures. L'imagination, aussi bien que nos sens, est une grande source d'erreurs. Ceux qui n'ont jamais fait usage de leur esprit pur, & qui sont accoutumés à ne concevoir que ce que l'imagination peut représenter, sont peu disposés à entrer dans la connoissance des choses spirituelles. Aussi ne voyons-nous que trop souvent que les plus grands Géometres ne sont pas bons Métaphysiciens ; c'est-à-dire, qu'ils ne conçoivent pas ce qui appartient aux Etres spirituels, comme sont Dieu, les Anges, & l'ame de l'homme. Cet in-

convénient ne ſe trouve point ici. Dans tout ce Traité de la Grandeur en général, il n'eſt beſoin en aucune maniere de ſe repréſenter des corps : il ne le faut pas même faire, puiſque ce qu'on dit de la Grandeur en général peut convenir à des choſes ſpirituelles, dans les perfections deſquelles l'on peut concevoir pluſieurs degrés, & qui par conſéquent ſont capables d'augmentation ou de diminution, & de pluſieurs rapports & proportions. Ainſi l'étude de ce Traité détache davantage l'eſprit des choſes ſenſibles que la Géometrie, & donne une plus grande diſpoſition pour concevoir les choſes ſpirituelles & abſtraites.

Les anciens Géometres, comme nous avons dit, ne ſe ſont point aſſujettis à garder un ordre naturel dans leurs Ouvrages, comme il paroît dans celui d'Euclide, qui ne ſemble propoſer les vérités qu'il enſeigne que comme elles ſe ſont préſentées fortuitement, puiſque celles qui appartiennent à des matieres différentes s'y trouvent mêlées ſans diſtinction. Cette confuſion ne ſe trouve point ici, tout y étant traité avec ordre & dans ſon lieu. L'on donne même dans le VII. Livre les regles de la méthode. C'eſt

pourquoi j'eſpere que cet Ouvrage pourra contribuer à former l'eſprit de ceux qui le liront; qu'il leur ſervira d'un modele de clarté par la certitude des démonſtrations qu'il contient, & de netteté par l'ordre qui y eſt gardé. L'on ne peut auſſi rien concevoir de plus propre pour rendre l'eſprit étendu; car, comme cet Ouvrage traite de la Grandeur en général, ſous laquelle tous les êtres finis ſont compris, il donne de vaſtes connoiſſances. La maniere de démontrer que l'on employe eſt très-féconde, comme on le reconnoîtra: elle ouvre des moyens pour trouver une infinité de démonſtrations. Je déſire que les jeunes gens prennent dans la lecture de cet Ouvrage l'habitude de concevoir & d'aimer les vérités qui ſont au-deſſus des ſens. Il y a des Problêmes curieux; s'ils y prennent plaiſir, ils y reconnoîtront que l'on peut trouver du divertiſſement ailleurs que dans des choſes matérielles & ſenſibles. C'eſt une réflexion que les Maîtres leur doivent faire faire. Ils auront occaſion de leur inſinuer pluſieurs autres vérités très-importantes; car en leur faiſant remarquer l'étendue de l'eſprit humain, qui paroît dans cette Science plus que

dans aucune autre, & leur montrant que ce ne ſont point les ſens ni l'imagination qui nous ont fait découvrir tant de vérités, ils les convaincront qu'il n'y a point d'homme raiſonnable, qui puiſſe penſer qu'une ame matérielle ſoit capable de tant de connoiſſances ſi certaines, ſi abſtraites & ſéparées de toute matiere, comme ſont particulierement celles que donne le ſixiéme Livre, où l'on traite des Grandeurs incommenſurables dont la valeur ne peut être exprimée par aucun nombre, & dont cependant l'eſprit découvre pluſieurs propriétés, perçant avec une ſubtilité merveilleuſe au travers des ténebres qui les cachent. Autrefois le Philoſophe Ariſtippe ayant apperçu ſur le rivage de l'Iſle de Rhode, où la tempête l'avoit jetté, des figures de Géométrie : Je vois, s'écria-t il, qu'il y a des hommes dans ce lieu : *Veſtigia hominum agnoſco.* En liſant un Traité de la Grandeur en général, & en conſidérant les démonſtrations étendues & fécondes qu'on y trouve, les vérités cachées qui y ſont expliquées, on a ſujet de s'écrier que l'eſprit de l'homme qui a trouvé toutes ces choſes, qui les conçoit, & qui les explique, eſt bien élevé au-deſſus de la matiere,

& de la condition des brutes; réflexion utile pour connoître la dignité de l'ame, & pour se convaincre qu'elle est faite pour quelque chose de grand. Mais si ce Traité fait voir l'étendue de l'esprit, il fait aussi connoître ses bornes; car il y a des démonstrations claires & convaincantes, qu'une grandeur finie est divisible jusqu'à l'infini. Cette infinité est incompréhensible : cependant on en fait connoître les propriétés, les rapports : ce qui démontre qu'il y a des vérités qui sont également certaines & incompréhensibles; & que par conséquent les vérités que la Religion nous enseigne ne doivent pas être suspectes, parce qu'on ne les comprend pas entiérement. Ceux qui enseigneront cet Ouvrage pourront trouver occasion de faire plusieurs semblables réflexions, qui non-seulement seront utiles pour donner de grandes ouvertures dans les Sciences, mais encore pour redresser l'esprit & le cœur de leurs Disciples, qui est le principal but que doivent se proposer les Maîtres.

C'est pour la troisiéme fois que je retouche cet Ouvrage. Il n'est point nécessaire que je marque en détail ce que cette derniere Edition peut avoir de particu-

lier : il n'y a qu'à la comparer avec les précédentes. J'ai tâché de profiter des Livres qui ont paru depuis la seconde Edition, des Ecrits de plusieurs Professeurs habiles qui enseignent actuellement dans Paris, & dont on ne peut ignorer ni le nom ni le mérite. Sur les avis qu'on m'a donnés, j'ai expliqué ce qui ne l'étoit pas assez, j'ai corrigé ce qui étoit défectueux, j'ai abrégé, j'ai retranché ce qui étoit moins nécessaire. J'ai ajouté bien des choses en différens endroits ; & j'ai augmenté tout l'Ouvrage d'un huitième Livre. Je ne prétens pas pour cela qu'il soit parfait. Ce sont des Elémens pour ceux qui commencent. Celui qui, après les avoir lus, concevra le désir d'en sçavoir davantage, sera capable d'entendre & de lire des ouvrages.

TABLE DES SECTIONS ET CHAPITRES.

LIVRE PREMIER.

LIVRE

LIVRE SECOND.

LIVRE TROISIEME.

Des Raisons ou Rapports que les Grandeurs ont entr'elles.

LIVRE QUATRIEME.

Des Raisons composées que les Puissances & toutes les Grandeurs de plusieurs dimensions peuvent avoir entr'elles.

LIVRE CINQUIEME.

Des Fractions & des Opérations Arithmétiques sur les Fractions & sur les Raisons.

LIVRE SIXIEME.

Des Grandeurs incommensurables.

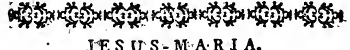
LIVRE SEPTIEME.

De la Méthode de résoudre une Question ou Problême.

LIVRE HUITIEME.

Supplémens des Elémens des Mathématiques.

Fin de la Table.



JESUS-MARIA.

Permission du R. P. Supérieur Général de la Congrégation de l'Oratoire de JESUS.

NOUS ABEL-LOUIS DE SAINTE-MARTHE, Prêtre, Supérieur Général de la Congrégation de l'Oratoire de JESUS-CHRIST Notre Seigneur, suivant le Privilege à nous donné par Lettres Patentes du Roi, en date du 12 Décembre 1672, signé NOBLET, par lesquelles sont faites défenses à tous Imprimeurs & Libraires, & à tous autres, d'imprimer ni mettre au jour aucun des Livres composés par ceux de notre Congrégation, sans notre expresse licence par écrit, à peine de confiscation des Exemplaires, & de mille livres

d'amende. Permettons au ſieur André Pralard, Libraire-Imprimeur à Paris, de faire imprimer & expoſer en vente un Livre intitulé : *Elémens des Mathématiques, ou Traité de la Grandeur*, *composés par le* R, P. LAMY, Prêtre de notre Congrégation. Donné à Paris le premier Octobre 1687.

Signé, A. L. DE SAINTE-MARTHE.

APPROBATION.

J'Ai lû par l'ordre de Monſeigneur le Vice-Chancelier, *les Œuvres du P. Lamy, contenant la Rhétorique, la Géométrie, & le Traité de la Grandeur*, & je n'y ai rien trouvé qui puiſſe en empecher ſa réimpreſſion. A Paris, le 22 Janvier 1765.

CLAIRAUT.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : à nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers, qu'il appartiendra, Salut. Notre bien-amé le ſieur KNAPEN, Imprimeur à Paris, Nous a fait expoſer qu'il déſireroit faire réimprimer & donner au Public un Ouvrage qui a pour titre : *Œuvres du Pere Bernard Lamy de l'Oratoire*, s'il nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce néceſſaires : A CES CAUSES, vou-

lant favorablement traiter l'Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire réimprimer ledit Ouvrage autant de fois que bon lui ſemblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de neuf années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes. Faiſons déſenſes à tous Imprimeurs, Libraires & autres perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire de réimpreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance, comme auſſi de réimprimer & faire réimprimer, vendre, faire vendre & débiter ni contrefaire ledit ouvrage, ni d'en faire aucun extrait, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Expoſant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, dommages & intérêts, à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles: que la réimpreſſion dudit Ouvrage ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modele ſous le contre-ſcel des Préſentes; que l'Impétrant ſe conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; qu'avant de l'expoſer en vente, l'imprimé qui aura ſervi de copie à la réimpreſſion dudit Ouvrage ſera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de

notre très-cher & féal Chevalier Chancelier de France le Sieur DE LAMOIGNON, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle dudit Sieur DE LAMOIGNON, & un dans celle de notre très cher & féal Chevalier Vice-Chancelier & Garde des Sceaux de France le Sieur DE MAUPEOU; le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & feaux Conseillers Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le vingtiéme jour du mois de Février, l'an de grace mil sept cent soixante-cinq, & de notre Régne le quarante-neuviéme. Par le Roi en son Conseil. *Signé*, LEBEGUE.

Registré sur le Registre XVI. de la Chambre Royale & Syndicale des Lib. & Imp. de Paris, N° 218, *fol.* 267, *conformément au Réglement de* 1723. *A Paris, le 6 Mars* 1765. *Signé*, LE BRETON, Syndic.

AVERTISSEMENT

Sur cette nouvelle Edition.

ON s'eſt donné tous les ſoins poſſibles pour que cette Edition fût auſſi correcte qu'aucune des précédentes, & elle aura du moins ſur la plupart d'entr'elles le mérite d'avoir été revue par quelqu'un qui n'eſt pas entierement étranger en Mathématiques. Soit que le calcul des Puiſſances par les Expoſans ne fût pas ſuffiſamment connu par le P. Lamy, ſoit que les Editeurs de ſon Ouvrage ayent pris la liberté de l'alterer, ce qui eſt plus vrai-ſemblable, il y a ſur cette matiere, dans la huitiéme Edition dont nous nous ſommes ſervis, des choſes peu exactes, pour ne rien dire de plus. On lit, par exemple, pag. 66 & & 91, *que* $x^q=0$, *& l'on trouve* pag. 449. *une démonſtration prétendue de cette fauſſeté. Nous avons enlevé de cet Ouvrage ces taches & quelques autres; & nous n'avons pas cru que, n'ayant pas été ſuffiſantes pour le priver du titre d'excellent, on pouvoit les y laiſſer ſans conſéquence, ainſi que quelques perſonnes l'avoient imaginé.*

ELEMENS

ELEMENS
DES
MATHEMATIQUES,
OU
TRAITÉ
DE LA GRANDEUR
EN GÉNÉRAL.

LIVRE PREMIER.

PREMIERE SECTION.

La ſcience de la Grandeur en général doit être regardée comme les Elémens de toutes les Mathématiques.

CHAPITRE PREMIER.

Quel eſt le ſujet de ce Traité de la Grandeur en général.

MA principale vue dans cet Ouvrage eſt 1.
d'ouvrir l'eſprit, & de le rendre capable des Sciences. Je traite donc ces Elémens de Mathématique, de maniere qu'ils ſervent de modele pour toute autre étude : car on pourra regarder ce qu'ils contiennent comme des

exemples, qui rendent ſenſibles les regles qu'il faut ſuivre dans la recherche de la Vérité. Pour cela, ceux qui liront mon ouvrage, doivent ſe mettre en ma place, ne conſidérant pas qu'ils ont un Livre entre les mains, mais ſe regardant comme Auteurs, & comme ayant à trouver ce que ce Livre propoſe d'enſeigner. Je ne leur ſervirai que de guide : je ne fais point le perſonnage de Maître, je prépare l'eſprit de celui qui lit mes Ecrits, de maniere que lui-même il peut, avec une médiocre attention, découvrir la vérité des principes que j'expoſe, & appercevoir les conſéquences qui en ſont les ſuites naturelles.

Je me comporterai donc ici comme ſi je ne ſçavois pas moi-même ce que c'eſt que les Mathématiques, ſi ce n'eſt que, ſelon qu'on parle de ce que les Mathématiciens peuvent faire, j'apperçois que l'objet général de toutes les Mathématiques, c'eſt tout ce qui eſt *Grand*, ou la Grandeur conſidérée en général. *Grandeur*, c'eſt tout ce qui peut être augmenté ou être diminué ; ce qui a des parties. Les Mathématiciens conſiderent les corps, ils font des figures, ils meſurent la terre, le mouvement des cieux ; ils font des machines, ils ſont Architectes. En toutes ces choſes, la *Grandeur* eſt leur objet. Ce nom comprend toutes les choſes matérielles & preſque toutes les ſpirituelles ; non ſeulement les corps, mais encore les eſprits. Car les Anges peuvent faire une compagnie qui peut être augmentée ou diminuée. On conçoit qu'on peut y ajouter d'autres Anges, ou les en retrancher. Chaque Ange fait partie de cette compagnie.

Ce mot de *Grandeur* ne convient donc pas ſeulement aux corps qui ſont étendus en longueur, largeur & profondeur, mais encore au tems,

u mouvement, aux ſons. Le tems a des parties : l peut être augmenté ou diminué : il eſt composé 'années, de mois, de ſemaines, de jours, d'heu-es, de minutes, &c. Le mouvement a auſſi des arties ou degrés, ſelon leſquels il s'augmente ou e diminue. Un corps ſe meut ou plus vîte ou plus entement qu'un autre, deux fois, trois fois, &c. es oreilles apperçoivent des degrés dans les ſons : n ſon eſt plus fort ou plus foible, il s'augmente u il ſe diminue. Généralement tout ce qui a des egrés eſt renfermé dans l'idée de la *Grandeur :* inſi les qualités, les perfections, qui ont des dé-rés, ſelon leſquels elles s'augmentent ou elles ſe iminuent, ſont des Grandeurs. De ſorte que la ience de la *Grandeur* eſt une ſcience univerſelle, ui s'étend preſque à toutes choſes. Au moins elle omprend en général toutes les Mathématiques : eſt pourquoi on lui a donné le nom de *Mathé-atique univerſelle* & *de Clef des Mathémati-es.* Certainement cette ſcience en eſt les élé-ens, c'eſt-à-dire, l'entrée : elle en découvre les emiers principes : elle contient ce qu'il faut ſça-ir avant toute autre choſe, & ce qui étant bien nnu, donne une merveilleuſe facilité pour en ap-endre toutes les parties. Ce mot *Elément* étant is pour les principes d'une ſcience, ce qui en nne une connoiſſance générale, en eſt les Elé-ens. S'il n'y a donc aucune partie des Mathé-atiques qui n'ait pour objet quelque Grandeur, ns doute que la ſcience de la Grandeur en géné-l en doit être regardée comme les Elémens. eſt donc par un Traité de la *Grandeur en géné-* qu'il en faut commencer l'étude.

CHAPITRE II.

Ce que c'est que la Grandeur. Elle est sucessive ou permanente, continue ou discrete. Les nombres se peuvent appliquer à toute espece de Grandeur.

2. GRANDEUR, c'est tout ce qui peut être augmenté ou diminué, ce qui a des parties. Tout ce qui est *grand* a des parties unies ou séparées. La grandeur des corps est continue; leurs parties, de quelque maniere qu'on les considere, ou selon leur longueur, ou selon leur largeur, ou selon leur profondeur, sont unies. Toutes les autres grandeurs ont leurs parties séparées; car une compagnie d'esprits est composée d'esprits qui sont distingués. Les parties du tems, du mouvement, des sons, ne sont pas liées les unes avec les autres : ce qui fait qu'on distingue la grandeur, ou *la quantité*, comme on parle dans les Ecoles, en *successive* & *permanente*. La successive est celle dont les parties se succedent les unes aux autres, ou existent les unes après les autres, comme le tems & le mouvement. La permanente est celle dont toutes les parties existent en même tems : elle se subdivise en *discrete* & *continue*. Les corps ont une quantité continue, leurs parties sont liées. La quantité discrete est celle de toutes les choses qui sont grandes, dont les parties sont séparées : ce que marque ce mot, *discrete*.

La quantité discrete se nomme *Nombres*, & la science qui traite des nombres, *Arithmétique*,

d'un mot grec *Arithmos*, qui signifie *nombre*. Les nombres ne sont proprement que des noms qui expriment les parties que l'on conçoit dans ce qui a de la grandeur. Or quoique la quantité continue ait ses parties unies, on peut au moins par la pensée concevoir entr'elles de la distinction; & ainsi on peut dire que la quantité discrete, ou les nombres, comprennent la quantité continue, & que ce que l'on enseigne de la quantité discrete ou des nombres, s'y peut appliquer. Les nombres sont composés de parties déterminées & indivisibles, ou plutôt que l'on conçoit comme indivisibles, & à la divisibilité desquelles on ne fait point attention. Car, par exemple, lorsqu'on veut mesurer une perche, & qu'on trouve qu'elle est égale à six pieds, on n'y considere que six parties, ne faisant point attention aux plus petites parties, dans lesquelles chacune de ces six parties peut être divisée.

Les nombres ne sont donc que des noms, dont les hommes se servent pour exprimer la quantité déterminée des parties qu'ils conçoivent dans une grandeur. *Un*, est un nom que l'on a donné à une grandeur qui est indivisible, ou que l'on considere sans avoir égard aux parties qu'elle peut contenir, mais seulement qu'on regarde comme pouvant faire partie de plusieurs autres grandeurs. Ainsi il n'est pas si difficile qu'on le veut faire croire, de donner une idée de l'*Unité*; parce que ce mot ne marque qu'une maniere de concevoir. *Deux*, est un nom qui signifie une partie d'une grandeur jointe à une autre partie : ainsi les autres nombres. On dit que l'*unité* n'est pas *nombre*, parce que l'on veut par ce mot marquer pluralité, ou multitude de deux ou plusieurs *unités*; c'est-à-dire, de plusieurs choses que l'on con-

çoit chacune comme faitant partie d'un même tout; & en tant que chacune s'appelle *une*, elle eſt regardée comme n'ayant point de parties. Mais ſuivant l'idée que nous avons donnée du nombre, qui ſans contredit eſt la plus naturelle des autres, rien n'empêche qu'on n'y puiſſe comprendre l'*unité*.

Les nombres limitent donc en quelque maniere cette propriété de preſque tout ce qui eſt grand, de pouvoir être diviſé à l'infini ; car un pied ſe diviſe en pluſieurs pouces, un pouce en pluſieurs lignes, une ligne en pluſieurs points, & ainſi à l'infini. Les nombres, dis-je, ſemblent borner & déterminer cette diviſibilité ; car on n'appelle une grandeur *une*, que lorſqu'on la conçoit comme dans la derniere diviſion dont elle eſt capable. Néanmoins, comme on le verra dans la ſuite, on peut exprimer même par des nombres ſa diviſibilité, en diſant, par exemple, la *moitié* de cette grandeur, le *quart* & *tiers*, &c. Les nombres qui expriment ces ſubdiviſions, ſe nomment *nombres rompus ;* au lieu que ceux qui expriment les premieres diviſions, s'appellent *nombres entiers.* Comme les nombres conviennent à toute ſorte de grandeur, la Grandeur en général n'eſt proprement qu'un Traité d'Arithmétique.

CHAPITRE III.

Des signes ou notes avec lesquels on peut exprimer les nombres, & toute Grandeur. Explication des autres notes dont on se servira.

POUR abréger l'expression d'un nombre & de toute sorte de grandeurs, on se sert de *signes* ou *notes*. L'on appelle *chiffres* ces caracteres que l'on dit que les Arabes nous ont donnés. Les voilà, avec les noms dont ils tiennent la place, ou qu'ils signifient, 1. *un*, 2. *deux*, 3. *trois*, 4. *quatre*, 5. *cinq*, 6. *six*, 7. *sept*, 8. *huit*, 9. *neuf*. 3.

Ces chiffres déterminent la maniere dont on considere une ou plusieurs grandeurs. Ils marquent qu'on y considere un certain nombre de parties : par exemple, ce caractere 3, marque que la grandeur à laquelle on l'applique, a trois parties, ou qu'elle est composée de trois grandeurs, chacune plus petite qu'elle, & qui sont égales entr'elles, ou de même nature : comme trois pieds, trois pouces, trois sols, trois livres, &c. Ainsi les chiffres ne sont d'usage que lorsque les grandeurs qu'il faut marquer sont connues, & par conséquent qu'on voit qu'elles ont tant de parties, ou qu'on y peut concevoir tant de parties. C'est ce qui fait qu'il est bon d'avoir d'autres signes ou notes que ces chiffres. On est accoutumé aux lettres de l'Alphabet ; on se les représente facilement. Or, quelques grandeurs qu'on puisse proposer, on les peut marquer avec les lettres, appeller l'une *a*, l'autre *b*, l'autre *c*, &c. quoiqu'on ne sache pas encore leur va-

leur; car pour appeller l'une *b*, & l'autre *a*, il n'eſt pas néceſſaire qu'on ſçache la quantité de parties qu'elles peuvent avoir au regard l'une de l'autre, au lieu que je ne les puis marquer avec des chiffres, & appeller l'une, par exemple, 2, & l'autre 3, ſi je ne connois leur valeur au regard l'une de l'autre, que l'une eſt, par exemple, les deux tiers de l'autre. Ainſi les lettres ſont des notes plus générales. On s'en peut ſervir pour marquer les nombres, au lieu qu'on ne ſe peut ſervir de nombres ou chiffres que pour marquer les grandeurs qu'on connoît.

Il ſemble que les hommes ayent d'abord commencé à compter ſur leurs doigts. L'on voit que preſque toutes les Nations, après avoir compté juſqu'à dix, autant que nous avons de doigts, recommencent. Les Hebreux & les Grecs, après avoir marqué les nombres juſques à dix par les dix premieres lettres de leur Alphabeth, la onziéme lettre eſt la marque de vingt, la ſuivante de trente, & ainſi de ſuite; & pour marquer les nombres qui ſe trouvent entre dix & vingt, entre vingt & trente, &c. comme quinze, ils joignent la cinquiéme lettre avec celle qui marque dix. Les Latins marquoient dix par un X, cinq par un V, l'unité par un I, deux par II, trois par III; & pour abréger, ils ſe ſervoient du V & du X pour marquer de moindres quantités, mettant devant autant de fois I que ces quantités valent moins que V ou X : ainſi IV vaut quatre, & IX vaut neuf. Pour les grands nombres, ils les marquoient par la premiere lettre de leur mot latin. Ainſi C, par où commence ce mot *centum*, marque *cent ;* & M, premiere lettre du mot *mille*, eſt la marque de *mille.* La lettre D, vaut *cinq cens.* On prétend que cette note étoit dans

: commencement la moitié de cette note CIↃ, ont on se servoit pour marquer *mille.*

Je ne dis ceci qu'en passant, car cela se trouve xpliqué ailleurs ; & ce n'est que pour faire voir ombien les chiffres sont plus commodes. Les rabes, de qui nous les avons reçus, ont suivi ette ancienne maniere de compter, en recomençant après qu'on est venu jusqu'à dix. Il est nportant de bien considérer que la valeur des iiffres ne dépend pas seulement de leur figure, ıais de leur disposition. Lorsque plusieurs chiffres ont rangés de suite dans une même ligne, ceux ui sont dans la premiere place, commençant à ompter de droite à gauche, ne valent jamais plus u'eux-mêmes. Ceux qui sont dans la seconde pla-:, valent dix fois davantage que s'ils étoient dans ı premiere : 1, par exemple, dans la premiere, e vaut qu'une seule unité ; dans la seconde, il ıut une dixaine ; dans la troisiéme, dix fois daıntage ; sçavoir, dix dixaines, ou une centaine ; ıns la quatriéme, dix centaines, ou un mille ; ıns la cinquiéme, dix fois mille, ou une diıine de mille ; dans la sixiéme, dix dixaines de ıille, c'est-à-dire, cent mille ; dans la septiéme, ne dixaine de centaine de mille, ou un million; ıns la huitiéme, une dixaine de millions ; dans neuviéme, une centaine de millions ; dans la ixiéme, un milliard, ou billion ; dans la onziée, une dixaine de milliards ; dans la douziée, une centaine de milliards ; ainsi de suite : ı sorte que la valeur d'un chiffre est dix fois lus grande dans le rang suivant, que dans le récédent.

Pour augmenter ainsi la valeur de chaque chife, on se sert d'un ou de plusieurs *zero*, selon que on veut faire valoir ce chiffre. Les zero sont

faits ainsi, 0; en remplissant les premiers rangs, ils font voir que le chiffre après lequel ils sont placés, est dans un rang plus reculé : comme si après 2, il y a deux zero en cette sorte 200, ces deux zero feront voir que 2 est dans le troisiéme rang, où il vaut deux cens. Ainsi, quoique les zero ne signifient rien d'eux-mêmes, ils ne sont pas inutiles, puisqu'ils déterminent les rangs des chiffres, selon lesquels leur valeur augmente ou diminue par proportion décuple. Il a plû aux premiers Inventeurs de ces chiffres d'établir cette proportion, ce qui étoit purement arbitraire.

Lorsqu'il y a plusieurs chiffres sur une même ligne, pour éviter la confusion, on les coupe de trois en trois par tranches, ou seulement on laisse un petit espace vuide; & chaque tranche, ou chaque *ternaire* a son nom. Le premier ternaire s'appelle unité; le second, mille; le troisiéme, millions; le quatriéme, milliards, ou billions; le cinquiéme, trillions; le sixiéme, quatrillions. Et comme dans le premier ternaire on compte 1°. nombre ou unités; 2°. dixaine; 3°. centaine, dans chaque autre ternaire, on dit de même, nombre, dixaine, centaine. Mais si c'est dans le troisiéme ternaire, cela voudra dire nombre de millions, dixaine de millions, centaine de millions; au lieu que dans le premier ternaire, quand on dit nombre, ou dixaine ou centaine, on n'entend parler que d'unités : tant d'unités, tant de dixaines d'unités, tant de centaines d'unités.

Considérons avec soin la disposition de ces chiffres qui est très-simple, & qui fait qu'avec neuf caracteres & les zero on peut exprimer quelque nombre que ce soit, pour grand qu'il puisse être.

[illegible] quintillions.			de quatrillions.			de trillions.			de billions.			de millions.			de mille.			d'unités.		
centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre	centaine	dixaine	nombre
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

4, &c.

Pour donner à un chiffre la valeur qu'il doit voir, il n'y a qu'à augmenter le nombre des ero qui le précedent. Quand on paſſe les quin- llions, cela s'appelle ſextillions, ſeptillions; inſi de ſuite. Ce ſont des mots que l'on invente, arce qu'on n'en trouve point d'autres.

Cette marque +, ſignifie *plus* A+*B*, c'eſt *plus B.*

Celle-ci —, ſignifie *moins.* A—*B*, c'eſt A *oins B.*

= C'eſt la marque de l'*Egalité.* C=D ſigni- e que C eſt égal à D. Au lieu de ce ſigne, on ouve en pluſieurs Livres celui-ci ∝ pour marque e l'Égalité:

× eſt le ſigne de la Multiplication. Il ſignifie roprement *multiplié par.* Pour dire qu'il faut oncevoir A multiplié par *B*, on écrit A × *B*.

s̃ ou *ſuprà*, c'eſt *ci-deſſus.*

L. *Livre.*

n. *nombre.* On met des nombres dans les mar-

A vj

ges de cet Ouvrage, qui servent à trouver les endroits où l'on renvoye. L. 2 n. 6. c'est-à-dire, *livre second, nombre six.*

Si ce qu'on allegue est du même Livre, on cite le nombre précédent qui est à la marge avec cette note s̄. Ainsi s̄ n. 5. c'est à-dire, *ci-dessus nombre cinquiéme.* Les autres notes qui sont dans l'Ouvrage, sont expliquées dans les lieux où l'on commence de s'en servir.

CHAPITRE IV.

Des principes ou vérités connues dont on peut tirer la connoissance des propriétés de la Grandeur.

4. AVANT que de passer outre, je dois examiner si je puis avoir quelque lumiere qui me guide dans les recherches que je ferai, & qui me fasse distinguer la Vérité, si je suis assez heureux pour la rencontrer; ou qui me redresse, si je me trompe. Je suis déja convaincu par plusieurs expériences qu'on ne se trompe point, lorsqu'on ne donne son consentement qu'à des choses claires, que les choses sont ce qu'il nous paroît clairement qu'elles sont. Je sçais aussi qu'il y a de certaines vérités connues de tout le monde, qui peuvent servir de flambeau, parce que toutes les choses qui ont de la liaison avec elles, & qui sont une même chose, doivent être également certaines.

Par exemple, je sçais qu'il ne se peut pas faire qu'*une chose soit & qu'elle ne soit pas*; d'où je conclus qu'*une grandeur est égale à elle-même*; & de cette vérité je conclus derechef, qu'il ne se peut pas faire que *le tout ne soit pas égal à toutes ses parties*; car le tout & toutes ses parties prises ensem-

e ne font qu'une même chofe. Voilà un nombre : vérités femblables qu'on nomme principes ou :iomes, que je rangerai ici, & que je tâcherai de e rendre bien préfentes. Et comme il eft impor- nt de s'accoutumer de bonne heure aux manie- s de parler des Mathématiciens, & aux fignes ou)tes dont ils fe fervent pour rendre leur difcours us court & plus exact, j'exprimerai ces axiomes ec ces notes & à leur maniere.

PRINCIPES GENERAUX,

vérités claires & connues, auxquelles on donne le nom d'Axiomes.

PREMIER AXIOME.

Le Tout eft plus grand que fa partie.

Ainfi, fi A & B font les parties de la grandeur , il faut que X foit plus grand que A & B pris)arément.

SECOND AXIOME.

tout eft égal à toutes fes parties prifes enfemble.

Si A & B font toutes les parties de la grandeur il eft évident que $A+B$, c'eft-à-dire, A avec eft égal à X : ce qui s'exprime ainfi $A+B=X$.

TROISIÉME AXIOME.

: grandeurs égales à une même grandeur font égales entr'elles.

Suppofé que A foit égal à Z, & que B foit auffi al à Z, alors A & B font deux grandeurs égales. 1 exprime ainfi ce raifonnement : fi $A=Z$, & $=Z$, ou fi $A=Z=B$, donc $A=B$. Je me virai fouvent de cette expreffion : qu'on y faffe ıc attention. On peut joindre à cet axiome ce- ·ci qui n'eft pas moins évident : Si A eft égal , toute grandeur plus grande ou plus petite que fera plus grande ou plus petite que A,

QUATRIÉME AXIOME.

Si à des grandeurs égales on en ajoute d'égales, elles demeurent égales, ou les sommes sont égales.

Si A=*B*, ajoutant à A & à *B* la même grandeur *X*, ils demeurent égaux; A+*X*=*B*+*X*.

CINQUIÉME AXIOME.

Si de grandeurs égales on en ôte d'égales, les restes seront égaux.

Si A=*B*, donc A—*X*=*B*—*X*; c'est-à-dire, que si A & *B* sont deux grandeurs égales, A moins *X* est égale à *B* moins *X*.

SIXIÉME AXIOME.

Si à des grandeur inégales on en ajoute d'égales, elles resteront inégales; l'une plus grande, si elle étoit plus grande; l'autre plus petite, si elle étoit plus petite.

Si *X* & *Z* sont des grandeurs inégales, & que A & *B* soient des grandeurs égales, *X*+A & *Z*+*B* seront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, selon ce qu'ils étoient auparavant.

SEPTIÉME AXIOME.

Si de grandeurs inégales on en ôte d'égales, les restes seront inégaux, l'un plus grand, si la grandeur étoit plus grande; l'autre plus petit, si la grandeur étoit plus petite.

C'est-à-dire, que si *X* & *Z* sont des grandeurs inégales, & A & *B* des grandeurs égales, *X*—A & *Z*—*B* seront inégaux, l'un plus grand ou plus petit, selon ce que *X* & *Z* étoient auparavant.

HUITIÉME AXIOME.

Une grandeur qui a le signe + étant jointe avec elle-même ou avec son égale qui a le signe —, est égal à rien.

C'est-à-dire +A—A n'est rien. On sçait qu'un zero n'a point de valeur: on exprime donc ainsi cet Axiome: +A—A=0 : ôtant ce qu'on a mis, il ne reste rien.

NEUVIEME AXIOME.

es choses qui sont moitié ou tiers, &c. d'une même grandeur, ou de grandeurs égales, sont égales; inégales, si les grandeurs entieres sont inégales; plus grandes, si les grandeurs entieres sont plus grandes; plus petites, si les grandeurs entieres sont plus petites.

On pourroit proposer plusieurs autres sembla-les Axiomes, c'est-à-dire, plusieurs autres vé-tés qu'on ne peut ignorer, & dont on ne dis-ute point.

CHAPITRE V.

De la maniere de raisonner en Mathématique; Ce que c'est que Démonstration.

TOUT ce qui est contraire à ces Axiomes, est faux, & tout ce qui a avec eux une aison nécessaire, est vrai & certain : ainsi ce nt des sources de lumieres, comme je l'ai ex-rimenté. Ce n'est pas néanmoins de ces seules rités, qu'on peut tirer la connoissance en-ere du sujet qu'on traite ; c'est encore de la otion claire qu'on a de ce sujet, c'est-à-dire, e sa nature, ou de ce qu'on connoît qu'il est. a véritable méthode pour connoître une chose, t de faire attention à ce qu'elle est. Sçavoir, est connoître ce que sont les choses. Toute nnoissance est une véritable science, lorsqu'on e prétend sçavoir que ce que l'on voit claire-ent dans l'idée de la chose qu'on étudie. C'est quoi plusieurs n'ont pas assez pris garde. Ainsi reconnois ici que pour avoir une véritable scien-e de la Grandeur, il faut considérer avec atten-

tion l'idée qu'on en a. Tout ce qui se tirera de cette idée ne sera pas moins certain que les conséquences des principes que nous venons de proposer. Comme de l'idée qu'on a du corps de l homme, l'on conclut sans erreur, que notre corps, pour être parfait, doit avoir une tête, des pieds, des bras, & les autres parties.

Lorsqu'on a supposé que les choses étoient faites de la maniere dont on convient, tout ce qui suit nécessairement de cette supposition est une vérité: comme si l'on convient que certaines regles sont bonnes; supposé qu'on les ait suivies, on ne peut rejetter les conséquences qui en sont tirées. Nous verrons comment de la seule disposition des chiffres, telle qu'on l'a supposée, on déduit plusieurs conséquences, qu'on voit clairement dans l'idée qu'on a de cette disposition.

Voilà donc la méthode qu'il me faut suivre, pour trouver la vérité. Premiérement je dois considérer avec attention l'idée des choses que je voudrai connoître, c'est-à-dire, considérer ce qu'elles sont, ou quelle est leur nature, que je dois bien définir, en marquant précisément la notion que j'en ai. La définition d'une chose, c'est une proposition qui explique sa nature, ou ce qu'elle est. Il y a des définitions de mots, c'est-à-dire, des propositions qui déterminent l'idée d'un mot, & qui en ôtent la confusion. Il est nécessaire de définir les termes dont on se doit servir: car souvent ils sont équivoques: & comme c'est, pour ainsi dire, au travers des noms que nous voyons les choses dont on nous parle, si les termes sont obscurs, on ne voit les choses que confusément. Lorsqu'une définition est bonne, si c'est une définition de mot, elle marque précisément ce que ce mot signifie; & si elle définit une chose, elle en doit donner une

ée où l'on apperçoive ce qu'elle eſt ; de ſorte
ı'en étudiant cette idée, on y découvre toutes les
opriétés eſſentielles de cette choſe.

Il y a des choſes ſi claires & ſi faciles à faire ;
ıe perſonne ne les conteſte, & qu'ainſi on accor-
:ra volontiers, comme par exemple, *qu'un nom-*
'e peut être ajouté à un autre nombre, ou *qu'il en*
ut être retranché, s'il eſt plus petit. C'eſt ce que
's Mathématiciens appellent *Demandes*, c'eſt-
·dire, des choſes qu'on accorde, parce qu'on ne
eut pas les conteſter. Comme la vérité naît de la
érité, & qu'il y a peu de vérités ſtériles, il faut
ire attention à tout ce qui eſt inconteſtable, &
ue tout le monde accorde, afin de voir ce qui
'en peut déduire.

Il faut ſur toutes choſes avoir préſens à l'eſprit
es principes généraux, ces vérités connues di-
nes qu'on les croye, qu'on appelle pour cela
!xiomes ; c'eſt ce que ce mot grec ſignifie. Elles
ervent comme de flambeaux ; & c'eſt par leur
ıoyen qu'on reconnoît preſque en toute occaſion
on a trouvé la vérité, ou ſi l'on s'eſt trompé.
Ious avons propoſé ci-deſſus ceux qui avoient
lus de rapport au ſujet que nous devons traiter.
Inſuite on s'applique à réſoudre les queſtions ou
ropoſitions que l'on peut faire ſur le ſujet qui ſe
raite. S'il s'agit de connoître & de démontrer une
érité de ſpéculation, la propoſition s'appelle
Théorême : c'eſt un mot grec qui dit cela. S'il
'agit de faire quelque choſe, & de prouver qu'on
ı fait ce qu'on avoit propoſé de faire, cela s'ap-
ɔelle *Problême.* Ce mot grec ne ſignifie que pro-
ɔoſition.

Pour démontrer un Théorême, il faut quel-
quefois faire précéder une propoſition qui ſerve
à la démonſtration qu'on veut faire, & qui ſoit

comme une *anse* par laquelle on peut attraper & prendre la vérité dont il s'agit. Dans toutes les Sciences, lorsqu'on cherche une vérité importante, il faut examiner par quel endroit on la peut attaquer, ce qu'il faudroit sçavoir, ce qu'il faudroit avoir démontré pour la bien connoître, ou la faire connoître. Or, lorsqu'on propose une vérité, dont on ne parle que pour faire connoître une autre vérité, la proposition que l'on fait s'appelle *Lemme*. C'est un mot grec qui signifie proprement le titre ou l'argument qu'on met à la tête d'un Livre ou d'un Chapitre, qui fait connoître de quoi on doit traiter. On ne met un Lemme là où il est, que pour donner une entrée dans la proposition qui suit.

On nomme *Corollaire* une proposition qui n'étant qu'une suite d'une proposition précédente, contient une vérité qui s'apperçoit aussitôt qu'on a reconnu la vérité de cette proposition précédente.

Selon ce que je viens de dire, lorsque la vérité d'une proposition est évidente, je dois me contenter de l'énoncer par des termes clairs; car la vérité n'a besoin pour preuve que d'elle-même: la clarté est son caractere. Si une proposition a besoin de preuve, je ne puis la prouver qu'en faisant voir qu'elle est une suite, ou d'un Axiome, ou de la définition, c'est-à-dire, de la notion claire de la chose; ou des suppositions qu'on a faites, qui sont incontestables, que tout le monde accorde, & qui ont été reçues pour véritables; ou de ce qui a été démontré auparavant dans un *Lemme*, dans un *Théorême*, dans un *Problême*, dans un *Corollaire*, &c. Un raisonnement fait avec cette exactitude, s'appelle *Démonstration*.

CHAPITRE VI.

propriétés de la Grandeur, qui sont les plus simples & les plus faciles à connoître.

E que je viens de faire n'est que pour me 6.
disposer à examiner ce que c'est que la
andeur. Comme la méthode avec laquelle je
ai cet examen, doit servir de modele pour
ıtes les autres études, je considérerai premié-
nent ce que moi-même je dois faire ici, qui
de faire une grande attention à ce que l'idée
la grandeur me présente; car il est évident
e dans ce que l'esprit voit, aussi-bien que dans
que voyent les yeux du corps, on ne découvre
que sont les choses qu'en les regardant de près
avec soin. Je ne connois ce que c'est qu'une
ur, quelle est sa figure & sa couleur, qu'en la
gardant attentivement; quelle est son odeur,
ı'en la flairant; quelle est sa saveur, qu'en la goû-
ıt. Aussi pour connoître ce que c'est que la
randeur, il faut que je sois attentif à ce que me
ésente son idée. Connoître, c'est voir ce que
nt les choses. Quand j'étudie la Grandeur, c'est
ıur voir ce qu'elle est; elle est ce que représente
n idée. Mais comme je sçais que mon esprit
t fini, qu'il s'égare, qu'il se trompe; je dois
ınsidérer les choses peu à peu & comme par
ırties, afin de donner une attention entiere à
ıut ce que j'examinerai, n'examinant d'abord que
: qui est le plus simple.

J'ai vu que la Grandeur est ce qui peut s'aug-
ıenter ou être diminué: d'où j'apperçois que c'est
ne propriété de tout ce qui est grand, qu'on lui

peut ajouter une autre grandeur, & en retrancher celle-là, ou une autre qui lui est égale ou plus petite : ce qui convient généralement à tout ce qui est grand. Une compagnie d'esprits peut s'augmenter par addition, & se diminuer par un retranchement ou soustraction. On peut concevoir un Ange avec un autre Ange, ce qui est une addition; & que d'une compagnie d'Anges on en retranche deux, trois, quatre Anges.

Multiplier une grandeur, c'est l'ajouter à elle-même un certain nombre de fois. Multiplier cinq par six, c'est ajouter cinq à soi-même, six fois. Ainsi c'est une propriété de tout ce qui est grand, de pouvoir être multiplié. La division n'est pareillement qu'un retranchement, ou soustraction. Diviser une grandeur par une autre, c'est retrancher celle-ci de la premiere autant de fois qu'elle y est contenue. Diviser une compagnie de soixante esprits par vingt, c'est voir combien dans soixante il y a de fois vingt, & retrancher vingt de soixante autant qu'il y est de fois, c'est-à-dire trois.

Ces propriétés sont faciles à connoître : l'idée de la Grandeur les présente d'abord, sans qu'on les recherche. Elles sont extrêmement simples; mais pour cela on ne doit pas en faire peu de cas : car j'ai reconnu que les principes de toutes les choses naturelles sont très-simples, & que lorsqu'on a une fois le principe ; on a tout.

Il est manifeste que toutes les choses matérielles sont faites par des additions & des multiplications ; que les changemens qui leur arrivent, se font par des retranchemens & des divisions. Mais il faut, avant que de passer outre, & de vouloir considérer en chaque grandeur comment elle est composée de parties ajoutées & multipliées, &

nent elle peut se résoudre ou décomposer par
ustraction & par la division, il faut, dis-je,
iiner auparavant comment tout cela se peut
, c'est-à-dire, comment on peut *ajouter*,
aire, *multiplier & diviser*, qui sont les quatre
iieres & principales opérations de toute l'A-
nétique.

ɔrsque les grandeurs sont petites, ou qu'on
eut exprimer avec un ou deux caracteres, ces
re opérations sont faciles: on voit tout d'un
ɔque 4 & 6 font 10; que de 10 ôtant 6, reste
jue si on multiplie 2 par 4, cela fait 8; com-
de fois 2 est en 4, qu'il y est deux fois: il
a rien de plus évident, & par conséquent
de plus facile. Mais il n'en est pas de même
jue les nombres sont grands; je n'apperçois
out d'un coup, comme je le faisois dans les
nples proposés, ce que fait 678 ajouté avec
; ni ce que produiroient ces deux nombres,
les multiplioit l'un par l'autre, ni ce qu'il
roit de 678, après en avoir retranché 593;
ombien de fois ce dernier nombre 593 est
678.

oilà en quoi consiste tout le secret *de l'Arith-
que*, ou *de l'Art de nombrer*: c'est de faire
parties ce qu'on ne peut pas faire tout d'un
; & c'est à quoi il faut faire une attention
culiere, non seulement pour entendre ce
l'on traite ici, mais généralement pour toutes
utres études; car ce qui fait qu'on trouve de
fficulté, qu'on n'avance pas, & qu'on tombe
l'erreur, c'est qu'on veut trop entreprendre.
prit est borné. Quand il ne s'applique qu'à des
es simples, il les comprend facilement; mais
id il y a plusieurs choses à voir, & qu'il ne
çait pas prendre les unes après les autres, il

n'en prend aucune comme il faut. Or ce qu'on fait dans l'Arithmétique donne un exemple de la méthode qu'il faut ſuivre. Dans les quatre opérations dont il eſt ici queſtion, l'on n'ajoute jamais que deux grandeurs, dont chacune ne s'exprime que par un des neuf premiers nombres; on ne multiplie à la fois que deux chiffres l'un par l'autre, dont chacun ne peut valoir plus de neuf. Il en eſt de même de la ſouſtraction & de la diviſion, comme on le verra dans la ſuite.

Cela ſe fait par le moyen de cette diſpoſition des chiffres de laquelle j'ai parlé; car on range les grandeurs ou leurs ſignes, qui ſont des chiffres, de maniere que les unités ſoient ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines; & enſuite on opere ſéparément ſur chaque chiffre; de ſorte que l'on ménage la capacité de l'eſprit; on ne l'accable point; & on lui fait faire les choſes les unes après les autres: ce que je répete afin qu'on y faſſe attention, & qu'on ſuive cet exemple dans toutes les recherches d'eſprit que l'on fera jamais.

Tout ce que l'on va donc dire touchant les quatre opérations dont on a parlé, eſt extrémement facile. J'ai dit qu'on marque les grandeurs avec deux ſortes de ſignes, qui ſont les lettres & les chiffres. Je conſidérerai premierement comment on opere avec les chiffres: car il n'y a rien dont les idées ſoient plus claires, que celles des nombres que les chiffres marquent. Vous verrez qu'il ne s'agira que d'exprimer ſur le papier l'addition de deux chiffres; par exemple, de 6 & de 7, qui fait *treize*, qu'il eſt facile de marquer ſur le papier; car *treize*, c'eſt une dixaine & trois unités; ainſi il faut mettre 3 dans le premier rang, qui eſt celui des unités, & 1 dans le ſecond rang, qui eſt celui des dixaines. Il en eſt de même des autres opéra-

dont je vais parler. Ensuite j'examinerai com-
on peut faire les mêmes opérations avec les
es de l'Alphabet, qui marquant les choses
e maniere fort générale, ne font pas tant d'im-
ion : elles ne déterminent pas l'esprit, qui ne
oit point facilement les choses quand elles
abstraites. Quand je nomme *x* une certaine
deur, je la représente d'une maniere générale,
in esprit qui n'est pas accoutumé à ces manie-
bstraites ne conçoit rien : il ne se peut rien
giner qui l'arrête, qui le détermine ; au lieu
si je la désigne par ce chiffre 7, aussi-tôt, se-
a matiere dont il s'agit, il conçoit une gran-
qui a ou 7 pieds ou 7 pouces. Si c'est d'une
me d'argent dont on parle, il s'imagine un
bre ou de pistoles, ou d'écus, ou de livres, &c.
choses particulieres & individuelles se conçoi-
plus aisément ; parce qu'il n'y a qu'elles qu'on
se sentir ou imaginer. Ce n'est que par la pointe
'esprit, pour ainsi dire, qu'on atteint & qu'on
çoit les choses générales. Comme il y a des
es qui ne peuvent être sensibles, il est impor-
de s'accoutumer à concevoir ce qui est ab-
t, c'est-à-dire, ce qui est séparé de toute
iere. Mais aussi puisqu'il faut commencer par
ui est plus facile, & que sans contredit les
fres se conçoivent plus facilement que les let-
& notes d'Algebre, voyons premierement,
nme l'on fait ces quatre premieres opérations de
rithmétique sur les grandeurs marquées avec
chiffres.

SECTION SECONDE.

DES QUATRE OPÉRATIONS DE L'ARITMÉTIQUE,

AJOUTER, SOUSTRAIRE, MULTIPLIER, ET DIVISER;

Sur des Grandeurs marquées avec des Chiffres.

CHAPITRE PREMIER.

PREMIERE OPÉRATION.

ADDITION.

Définition de l'Addition.

7. *L'Addition est une opération par laquelle, ayant ajouté plusieurs nombres connus en une somme, on connoît la valeur de cette somme, qui étoit inconnue.*

PROPOSITION PREMIERE.

Premier Problême.

8. *Ajouter plusieurs nombres donnés en une somme; & connoître quelle est cette somme.*

I. *Il faut disposer les nombres donnés de telle sorte*

rte que les premiers chiffres des uns soient sous 's premiers chiffres des autres, les unités sous 's unités, les dixaines sous les dixaines, les cen-tines sous les centaines, &c. après cela il faut jouter ces deux sommes par parties, commençant ette addition par le premier rang de droite à gau-he, afin que la somme s'augmentant, on rejette 's chiffres dans les rangs suivans, où ils valent avantage.

Exemple. Ces deux sommes 432 & 245 sont onnées; on veut sçavoir quelle est la valeur de es deux nombres.

Je dispose, comme il a été enseigné; ces eux sommes. Je mets sous 2 qui vaut deux uni-ès, 5 qui vaut cinq unités; sous 3 qui aut trois dixaines, 4 qui vaut des di-aines; & 2 qui vaut des centaines, ous 4 qui vaut des centaines: ensuite commen-ant de droite à gauche, je dis 2 & 5 font 7 uni-ès que j'écris, sous le rang des unités.

432
245

Venant au second rang, je dis 3 & 4 ont 7 dixaines, que je mets sous le rang es dixaines. Enfin dans le troisiéme ang je dis 4 & 2 font 6 centaines, le-uel chiffre je pose sous ce rang des centaines, insi j'ai 677 qui est la somme cherchée, égale ux deux qu'on avoit proposées pour être ajou-ées en une seule.

432
245
———
677

II. *Si l'addition des chiffres d'un rang fait un lus grand nombre que celui qui se peut mettre ans ce rang, il ne faut placer sous ce rang là ue ce qui lui appartient, & réserver le reste our le rang suivant. Par exemple, si l'addi-ion des chiffres du premier rang fait* quatorze, *omme ce nombre vaut une dixaine & quatre nités, & qu'on ne peut placer dans ce rang que*

des unités, j'écris seulement 4 sous ce rang, & je reserve une dixaine pour le rang suivant.

EXEMPLE. Ces deux sommes 459 & 665, sont données; on veut sçavoir le nombre qu'elles sont, étant ajoutées en une somme. Je dispose ces deux sommes comme elles doivent être disposées : dans la maniere que vous le voyez.

459
665

Je dis premiérement, 9 & 5 font 14, j'écris donc 4 dans le premier rang, & je retiens une dixaine pour le second. Après je dis, une dixaine que j'ai retenue avec ces deux chiffres 5 & 6, qui sont dans le second rang, fait douze dixaines, j'écris donc deux dixaines, posant 2 dans le rang de dixaines, & je réserve dix dixaines ou une centaine pour le troisiéme rang. Venant à ce troisiéme rang, je dis, une centaine que j'ai retenue avec 4 & 6, fait onze centaines, ce qui vaut un mille plus un cent; ce que j'exprime, posant un dans le rang des centaines, & 1 mille dans le rang des mille : Et cela me donne cette somme,

459
665
————
1124

III. *Si l'addition des nombres, de quelque rang que ce soit, produit un nombre juste de dixaines; par exemple, ou une, ou deux ou trois, &c. on met seulement un zéro sous ce rang, & le chiffre dans le rang suivant. Cette regle est une suite de la précédente.*

EXEMPLE. Il faut ajouter ces deux nombres 575 & 425 : je les dispose selon la premiere régle : après je dis 5 & 5 font 10, je ne marque selon cette troisiéme régle, qu'un zéro sous ce premier rang, & je réserve 1 pour le suivant. Ensuite je dis 1 avec 7, & 2 qui sont dans le second rang, font 10; je ne dois donc marquer

encore par la même regle qu'un zéro sous ce rang, & réserver 1, qui avec 5 & 4 du rang suivant fait encore 10, ainsi je n'écris que zéro sous ce rang, & je place 1 dans le rang suivant, qui est celui des mille. La somme de ces deux nombres est donc un mille.

575
425
1000

Autre Exemple. Soient ces deux nombres 5678 & 4625, donnés pour être ajoutés.

1°. Je les dispose comme il a été enseigné.

2°. J'ajoute les unités, qui font 13, j'écris donc seulement 3 dans le rang des unités, & je réserve une dixaine pour le rang suivant.

5678
4625
10303

3°. Je viens à ajouter les dixaines, & je trouve neuf dixaines, qui avec celle que j'avois réservée font dix dixaines, c'est-à-dire, une centaine que je ne puis placer dans ce deuxiéme rang, où je marque un zéro, pour faire voir seulement que le nombre suivant est le troisiéme rang.

4°. Je fais l'addition du troisiéme rang, où je trouve 12 centaines, qui avec celle que j'avois réservée font 13 centaines. Je n'en puis placer que trois dans ce troisiéme rang; je réserve donc les dix autres ou un mille pour le quatriéme rang, qui est celui des mille.

5°. Je trouve dans le quatriéme rang neuf mille, ce qui fait avec celui que j'ai reservé une dixaine de mille que je marque dans le cinquiéme rang, après avoir mis un zéro pour remplir la place du quatriéme; ce qui étant fait, je sçai que 5678 avec 4625 fait 10303.

IV. *Une addition de plusieurs zéro ne produit qu'un zéro, puisque plusieurs fois rien ne fait rien; ainsi ces additions se font fort vîte. Il ne faut qu'ajouter les autres chiffres, & mettre en-*

suite autant de zéro qu'il est nécessaire, afin que ces chiffres se trouvent dans le rang qui leur convient.

EXEMPLE. Ces trois nombres 2000, 3000, 4000, sont donnés pour être ajoutés. Il est facile de le faire ; car puisque les zéro ne servent qu'à occuper les premiers rangs, & faire paroitre que les autres chiffres qui sont placés ensuite des zéro, sont dans un rang plus reculé, après avoir disposé ces sommes comme il a été dit, il ne faut qu'ajouter 2 avec 3 & avec 4, ce qui fait neuf, & après 9 marquer trois zéro, ce qui fera neuf mille, somme que l'on cherchoit.

2000
3000
4000
9000

Exemple d'addition. Ces cinq nombres sont donnés 4567, 7919, 3488, 5896, 7685; après les avoir disposés selon la coutume,

1°. J'ajoute les unités qui sont dans le premier rang, où j'en trouve trente-cinq, qui valent trois dixaines plus cinq unités; je marque donc seulement sous le rang des unités 5.

2°. Dans le deuxiéme rang je trouve 32 dixaines, qui avec les trois dixaines que j'avois réservées, valent trois centaines, plus cinq dixaines; je réserve pour le rang suivant 3 centaines, & je pose dans celui-ci cinq dixaines.

4567
7919
3488
5896
7685
29555

3°. Dans le troisiéme rang il y a 32 centaines, qui avec les trois que j'avois réservées valent trois mille, plus cinq cens, j'écris dans ce rang des centaines, cinq cens, & je réserve trois mille pour le rang des mille.

4°. Dans le rang des mille il y a 26 mille, qui avec les trois mille réservés font deux dixaines de mille, plus neuf mille; je pose les neuf mille

ians ce rang & dans le ſuivant deux dixaines le mille : ſi bien que ces cinq ſommes valent 19555.

9. Quand les nombres ſur leſquels on opere ſont trop grands, ce qui arrive lorſqu'il y a pluſieurs chiffres ſur une même ligne, il faut, pour éviter la confuſion, partager les rangs de trois en trois ſur une ligne ou par un petit eſpace vuide, comme nous l'avons dit §. n. 3. Mais quand on a pluſieurs nombres à ajouter ſur une même colonne, alors il eſt à propos, pour ne pas s'embrouiller, de partager l'opération, & de ne pas ajouter ces nombres tout à la fois. Par exemple, s'il y avoit 30 nombres ou ſommes différentes, on doit les partager par des lignes en plus ou moins de parties, ſelon qu'on a l'eſprit plus ou moins fort, comme ici ayant 30 ſommes, il en faut faire, ſi on veut, six portions, & les tranſcrire ailleurs pour opérer sur chacune ſéparément; on ajoute enſuite ces ſommes partiales en une totale qui comprendra les trente premieres ſommes : ou bien à côté de chaque rang auſſi-tôt qu'on a compté juſqu'à dix on met un point comme vous le voyez dans cet Exemple, où aprés avoir diſpoſé les ſommes comme à l'ordinaire, ajoutant les nombres du premier rang; comme 9 & 8 font dix-ſept, je mets à côté de 8 un point, & je dis 7 & 3 font 10. Je marque donc un point à côté du 3. Enſuite je dis 6 & 7 font seize. Je marque donc encore un point à côté de 7, & je dis 3 & 8 font onze. Je marque un point à côté du 8, & 1 ſous le premier rang. Je compte ces points qui ſont quatre, qui me font connoître qu'il y a quatre dixaines de réſervées pour le rang ſuivant. Je laiſſe le reſte

4 5 3 8.9
6.7.5.3 8.
2 4 6 5.3.
1 8.7.9 6
5.6.4 6.7.
7 5 9.4 8.
2 8 8 7 9 1

de cette queſtion à réſoudre pour vous exercer. Vous voyez qu'on ne ſe peut pas brouiller, parce que l'on ne fait que de très-petites additions.

L'artifice de cette premiere opération ne conſiſte, ainſi que je l'ai dit, qu'en ces deux choſes : à faire les additions par parties, & à exprimer ſur le papier les additions partiales qu'on fait dans ſon eſprit. Il en ſera de même des trois autres opérations ſuivantes. Je commence de haut en bas, faiſant l'addition de chaque rang, ajoûtant le nombre qui eſt au-deſſus avec celui qui eſt deſſous. On peut ſi on veut monter de bas en haut, ajoutant le nombre qui eſt deſſous avec celui qui eſt deſſus ; c'eſt une même choſe.

La preuve de l'addition ſe fait par la ſou-
10. *ſtraction, comme nous le verrons. Elle en a une autre qu'on nomme la preuve de 9 : voici en quoi elle conſiſte. Sans avoir égard au rang des chiffres, dans les nombres propoſés, on les ajoute les uns aux autres, & on en rejette 9 autant qu'il ſe peut. On fait la même choſe dans la ſomme générale de tous ces nombres ; & ſi après en avoir rejetté 9, il y a un même reſte, c'eſt une marque (équivoque, comme on le verra) qu'on ne s'eſt pas trompé ; ce qu'un Exemple fera comprendre. On veut ſçavoir ſi* D *eſt véritablement la ſomme des trois nombres* A, B, C. *Commençant par* A, *je dis : ces quatre chiffres 3, 5, 8, 1, font 17, d'où ayant rejetté 9, le reſte eſt 8. Ce reſte avec ces trois chiffres, 2, 3, 5, du nombre* B *ſont 18, d'où ayant rejetté 9 autant qu'on le peut, il ne reſte rien : on n'a point d'égard aux zéro dans cette opération. Venant à* C, *ces trois chiffres 6, 1, 3, font 10, d'où ayant rejetté 9, il reſte 1. Or aſſemblant de même les chiffres de*

A	3581
B	2350
C	6013
D	11944

D, 1, 1, 9, 4, 4, *on fait* 19, *d'où ayant rejetté* 9, *autant qu'on le peut, il reste encore* 1; *ainsi selon cette preuve*, D *est effectivement l'addition des nombres* A, B, C. *Le fondement de cette preuve, c'est que les chiffres de tout nombre dans lequel* 9 *est contenu exactement un certain nombre de fois, sans avoir égard à leur ordre, joints ensemble, sont* 9 : *ainsi les chiffres de ces nombres* 18, 27, 36, 45, 54, *&c. dans lequel* 9 *est contenu exactement tant de fois, sont tous* 9. *Il en est de même des grands nombres. Par exemple* 108, 216, *où neuf est contenu tant de fois exactement, on n'a point d'égard aux zéro; Dans* 108, *vous voyez que* 1 *&* 8 *font* 9, *comme dans* 216, *ces trois chiffres* 2, 1, 6, *font aussi* 9. *Mais cette preuve n'est pas infaillible; car la même chose arriveroit, soit que* D *fût* 11944, *ou* 19144 : *il y a pourtant bien de la différence. Ainsi ce n'est que pour satisfaire la curiosité que je la propose.*

CHAPITRE II.

SECONDE OPÉRATION.

SOUSTRACTION.

Définition de la Soustraction.

LA Soustraction est une opération par laquelle on ôte d'un plus grand nombre un plus petit, 11.
& l'on marque ce qui reste après cette Soustraction, lequel reste est la différence de ces nombres, comme il est évident : ayant ôté 8 *de* 12, *le reste, qui est* 4, *est la différence de* 8 *&* 12.

PROPOSITION SECONDE.

PROBLEME II.

12. *Deux nombres étant donnés, soustraire le plus petit du plus grand, & connoître ce qui reste, ou la différence de ces deux nombres.*

1°. *Il faut placer le nombre qui est le plus petit sous le plus grand; les unités sous les unités; les dixaines sous les dixaines, &c. Après, commençant cette opération par le premier rang de droite à gauche, il faut retrancher le plus petit du plus grand, & marquer ce qui reste; si ce sont des unités qui restent, marquer ces unités sous les unités, &c. : ce reste sera la différence qu'il y a entre les deux nombres donnés.*

Exemple. Les deux nombres donnés sont 869, & 234. Il faut retrancher le second du premier. Je les dispose comme il a été dit, 234 sous 869. De 9 j'ôte 4, il reste 5, que je marque sous le premier rang, ensuite je dis de 6 ôtant 3, il reste 3, que j'écris sous le deuxiéme rang. Enfin de 8 j'ôte 2, le reste est 6, que j'écris sous le troisiéme rang. Ainsi après avoir ôté 234, de 869, il reste 635, qui est la différence de 869 avec 234.

869
234
635

2°. *Lorsque le chiffre qu'on veut retrancher est plus grand que celui de qui on veut le retrancher, il faut, pour augmenter ce dernier, emprunter une dixaine dans le rang suivant.*

Exemple. Les nombres 678 & 489 sont donnés; il faut retrancher le plus petit du plus grand, je ne puis pas ôter 9 de 8, c'est pourquoi, selon la regle, j'emprunte une dixaine du rang suivant, au lieu de 7 écrivant un 6; & après je dis,

e 18 ôtant 9, il reste 9, que je place ans son rang. Ensuite je viens au deuiéme rang où est 6, duquel ne pouvant ncore soustraire 8, j'emprunte de la iéme maniere une dixaine du chiffre iivant, & je dis, de 16 ôtant 8, il reste 8. Enfin enant au dernier chiffre, qui ne vaut plus que , j'en retranche 4, & il reste 1 : ainsi de 678, re-anchant 489, il reste 189, qui est la différence e ces deux sommes.

56
678
489
189

Au lieu de changer les chiffres du nombre supéeur, il n'y a qu'à augmenter ceux de dessous ans le nombre inférieur ; comme ayant ici emrunté une dixaine de 7, chiffre suivant de droite gauche, pour l'ajouter à 8 qui précéde ; au lieu 'effacer 7, & d'écrire 6 en sa place, il n'y a qu'à ugmenter le chiffre 8 du rang inférieur qui est essous 7, disant, de 7 j'ôte 9, ce que ne pouant faire sans emprunter encore du chiffre suiant une dixaine, je dis de même, de 17 ôtant , reste 8; & ensuite au lieu de dire de 6 ôtant , je dis, de 6 ôtant 5 reste 1 : ce qui produit oujours la même chose. L'avantage de cette méiode, c'est qu'on n'efface pas les chiffres. Elle est lus facile dans la pratique ; & je n'ai proposé la remiere que parce qu'elle est plus facile à entenre pour ceux qui commencent. 13.

3°. *Quand il se trouve un zéro dans le nomre qui est dessous, on met entre les nombres restans elui sous lequel le zéro est placé, puisque d'un l nombre n'ôtant rien, ce nombre doit rester tout itier.*

Exemple. Soient donnés ces deux nombres 42, & 405 ; pour retrancher le plus petit du plus rand : après avoir placé 405 sous 842, je consiere qu'on ne peut ôter 5 de 2, le plus grand

nombre du plus petit ; j'emprunte donc du deuxiéme rang une dixaine, écrivant 3 au lieu de 4 ; & puis je dis, de 12 ôtant 5, reste 7 ; ensuite de 3 ôtant zéro, c'est-à-dire rien, reste le nombre entier sous lequel zéro est placé. Je marque donc 3 au deuxiéme rang. Enfin de 8 je retranche 4, le reste est 4. De cette soustraction vient 437, qui est le reste de 842, dont on a retranché 405, ainsi 437 est la différence de ces deux nombres.

3
842
405
437

4°. *Quand le nombre qui doit être retranché est égal à celui de qui on le retranche, comme il ne reste rien, on met un zéro qui en est la marque.*

EXEMPLE. S'il falloit ôter 246 de 346 : puisque 46 est égal à 46, selon la regle je mets deux zéro ; & retranchant 2 de 3 dont le reste est 1, l'opération me donne 100, qui est le nombre que je cherchois.

346
246
100

5°. *Quand sous un zéro il y a un zéro, il faut mettre un zéro pour conserver la valeur des caracteres qui suivent, & qui précédent.*

EXEMPLE. Ces deux nombres sont donnés 800, & 200 ; je retranche simplement du chiffre 8 le chiffre 2 ; il reste 6, après lequel chiffre je mets deux zéro pour faire voir que 6 est le reste de 8 cens, dont on a retranché deux cens.

800
200
600

6°. *Lorsque dans le nombre dont on retranche un autre nombre, il y a plusieurs zéro de suite, de sorte qu'on ne peut emprunter une dixaine du rang suivant pour faire la soustraction des nombres qui doivent être retranchés ; il faut, ou exprimer le nombre d'une autre maniere, en sorte*

n'il y ait d'autres caracteres que des zéro ; comme si ce nombre étoit 10000, l'exprimer ainsi 9990, plus 10 ; ce qui est la même chose : (car neuf mille neuf cens quatre-vingt-dix, plus dix, font dix mille ; ou plutôt il faut faire cette soustraction, en empruntant ou supposant des dixaines pour suppléer aux zéro, comme on fait, lorsque dans le nombre supérieur il y a plusieurs chiffres de suite plus petits que ceux de l'inférieur : parce que tous les emprunts se reprendront sur le premier chiffre de valeur qu'on rencontrera.

Premier Exemple. Soient donnés ces deux nombres 900 & 432 ; pour retrancher ce petit nombre 432 du plus grand 900, ne pouvant rien soustraire de deux zéro, au lieu de 900, j'écris huit cens nonante, & je conserve dix en ma mémoire pour le premier rang ; car 890, plus dix, font la même chose que 900 ; je retranche 2 de ce nombre 10 que j'ai retenu, il reste 8 que je mets sous le premier rang ; de 9 je retranche 3, & je pose le reste, qui est 6, sous le deuxiéme rang ; de 8 je retranche 4, reste 4, que j'écris sous le troisiéme : ainsi le reste de 900, après en avoir ôté 432, est 468, ce que l'on cherchoit.

890
~~900~~
432
468

Second Exemple. Soit le nombre de 80000 duquel il faut retrancher ce plus petit 53642 D'abord ne pouvant soustraire 2 de zéro ou de rien, j'emprunte une dixaine du rang suivant ; sans avoir égard à ce que ce n'est qu'un zéro, pour la raison que j'ai rapportée, de 10 ôtant 2, reste 8. Du second zéro, qui même doit un, ne pouvant ôter 4, j'emprunte encore 10, quoique le chiffre suivant ne soit non plus qu'un zéro ; de ce 10 je retranche 5, à cause de la dixaine qu'on

80000
53642
26358

a prêtée au premier zéro ; & ſelon la méthode enſeignée S. n. 13, qu'il faut toujours pratiquer comme plus aiſée, & le reſte eſt 5. De même pour le troiſiéme zéro je ſuppoſe une dixaine, de laquelle ôtant 7, il reſte 3. Je viens au quatriéme rang, ou ayant ſuppoſé 10 au lieu de zéro, & en ayant ôté 4, le reſte eſt 6. Comme les huit dixaines de mille du dernier rang n'en valent plus que 7, parce qu'on en a prété une pour les rangs précédens ; il faudroit donc effacer 8, & écrire 7 en ſa place ; mais il n'y a qu'à augmenter encore le chiffre de deſſous d'autant : ſçavoir, d'une dixaine de mille ; ainſi au lieu d'effacer 8, & de récrire 7 pour en ôter 5, j'ôte tout d'un tems 6 de 8, & reſte 2. Partant j'ai le nombre 26358, reſte de 80000, après en avoir retranché, nonobſtant les zéro, le nombre 53642 ; & c'eſt ce qu'on cherchoit.

Exemple de Souſtraction. Les deux nombres 5782 & 3456 ſont donnés pour être retranchés de ce troiſiéme 68386, il faut ajouter par la premiere propoſition les deux premiers dans une ſomme qui ſera 9238. Après qu'on s'eſt beaucoup exercé à faire ces opérations, on peut faire cette addition en ſon eſprit, mais dans les commencemens il eſt bon de la faire avec la plume.

Je place 9238, total de l'addition 5782, avec 3456, ſous la ſomme de 68386, comme dans les autres exemples. Enſuite commençant par les unités du premier rang, je dis, de 6 on ne peut ôter 8, j'emprunte donc une dixaine du rang ſuivant, qui avec les ſix unités font 16, de 16 ôtant 8, reſte 8, que je marque ſous ce premier rang des unités. Après venant au deuxiéme rang, je dis, de 7 dixaines ôtant 3, reſte 4 ; je dis de 7, car vous ſçavez que nous avons déja ôté une di-

```
  5  7
 68386
  9238
 -----
 59148
```

aine de ce rang. Au troiſiéme rang, je dis de 3 ant 2, reste 1. Au quatriéme rang, de 8 je ne iis ôter 9, j'emprunte du rang ſuivant qui eſt elui des dixaines de mille, une dixaine de mille, ai avec les huit mille de ce quatriéme rang, fait 8 mille; je dis donc de 18 mille, ôtez 9 mille, ſte 9 mille.

Enfin venant au cinquiéme rang, puiſqu'il n'y a en qui en doive être retranché, je marque avec s autres ce que je trouve dans ce rang, ſçavoir 5, r des 6 dixaines de mille qui reſtoient, j'en avois ja retranché une dixaine.

Le reſte donc de 68386, après en avoir retranché s deux ſommes 5782 & 3456, le reſte, dis-je, t 59148.

Autre Exemple. Voilà encore un exemple de uſtraction faite ſelon la maniere que nous avons opoſée ſ. n. 13. Soit:

Somme	493025
ſouſtraire	257532
Reſte	235493

2 9
5 3̸ 0̸ 2 5
7 5 3 2

35493

Je dis ainſi : Qui de 5 ôte 2, ou ſimplement 2 de 5, reſte 3.

Enſuite : Qui de 12 paye 3, reſte 9, & je retiens 1 par mémoire que j'ajoute à 5, ce qui fait 6. Je dis: Qui de 10 paye 6, reſte 4, & je retiens 1 que j'ai emprunté, & que je joins à 7, ce qui fait 8 que j'ôte de 13, & ſte 5, & je retiens par mémoire 1 que j'ai emprun-, lequel avec 5 fait 6, que j'ôte de 9, & reſte 3; puis 2 de 4, reſte 2. Cette maniere eſt plus prom-, & eſt chargée de moins de chiffres que la ſe-nde, dans laquelle on écrit les reſtes après avoir prunté, comme vous le voyez dans la maniere dinaire.

PROPOSITION TROISIEME.

THEOREME PREMIER.

14. *La soustraction & l'addition se servent reciproquement de preuve l'une à l'autre.*

La soustraction & l'addition sont opposées l'une à l'autre ; l'une défait ce que l'autre a fait ; ainsi elles se servent réciproquement de preuve. Car le tout étant égal à ses parties, si on ôte toutes les parties du tout, il ne doit rien rester ; si on n'en ôte que quelques-unes, on aura les autres pour reste ; par conséquent on sera assuré que 677 est véritablement la somme de 432 & de 245 ajoutés ensemble : si l'un des deux étant ôté de l'entier 677, il reste l'autre ; ou si tous deux étant retranchés de 677, il ne reste rien ; cela, dis-je, est une marque qu'ils sont véritablement les parties de ce tout ; & par conséquent que l'addition a été bien faite.

De même pour être assuré qu'en retranchant de 677 ce nombre 432, le reste est 245, c'est-à-dire que 432 & 245, sont les parties du tout 677, j'ajoute ces deux nombres 432 & 245 ; & s'ils font 677, je conclus qu'ils sont véritablement les parties de 677, & par conséquent que mon opération est bonne.

Ces opérations sont si simples qu'on ne concevroit pas comment l'on s'y peut tromper, si l'expérience ne nous en convainquoit. L'on n'ajoute ensemble que deux nombres à la fois, dont chacun ne peut être plus grand que neuf, & chacun des nombres qu'on retranche l'un de l'autre, n'excede pas la même valeur : cependant on est quelquefois obligé de recommencer, parce qu'on voit que

e que l'on a fait ne quadre pas, sans s'appercevoir l'abord en quoi l'on s'est pu tromper. La cause de 'erreur, c'est qu'on va trop vite, & que sans ien prendre garde à ce que l'on fait, en calculant n dira, par exemple, 5 & 6 sont treize. On compte à-dessus comme si cela n'étoit pas faux. Toutes ios erreurs, en quelque matiere que ce soit, ont la iême cause. Nous supposons sans délibération q e es choses les plus fausses sont certaines, & après ous en tirons des conclusions comme de principes nfaillibles. Puisque ce petit ouvrage est fait pour rvir de modele de la maniere de bien conduire n esprit dans les Sciences, il faut faire atten- on à cette remarque.

Chapitre III.

PERATION TROISIEME,

MULTIPLICATION.

Définition de la Multiplication.

A Multiplication est une espéce d'addition, par laquelle on ajoute un certain nombre don- antant de fois à lui-même, qu'il y a d'unités ns un autre nombre donné. 156.

Multiplier 5 par 6, ce qui fait 30, c'est ajouter itant de fois 5 à lui-même, qu'il y a d'unités ns 6. On appelle *multiplicateur* le nombre qui ultiplie, & on appelle *produit* le nombre que on cherche, & que la multiplication produit. ans cet exemple 5 étant donné pour être multi- ié par 6, ce deuxieme nombre 6 est le multi- cateur, & 30 qui est fait par cette multiplication le produit.

PROPOSITION QUATRIEME.

Probleme troisieme.

26. *Multiplier un nombre par un autre nombre, & connoître ce que produit leur multiplication.*

1°. *Il faut placer le multiplicateur sous le nombre à multiplier, comme dans l'addition; ensuite commençant de droite à gauche, multiplier le nombre à multiplier par le premier chiffre du multiplicateur; & écrire leur produit, comme on fait la somme d'une addition.*

Exemple. Soit proposé 24 pour être multiplié par 3, je place le multiplicateur 3 sous 4; & je dis 3 fois 4 font 12, je pose 2 au premier rang, & je retiens dans ma mémoire une dixaine pour le rang suivant; je dis, 3 fois 2 font 6, & 1 que j'avois retenu font 7; le produit de 24 multiplié par 3 est donc 72.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 3 \\ \hline 72 \end{array}$$

2°. *Lorsque le multiplicateur est composé de plusieurs caracteres, on multiplie pareillement par le premier de ces caracteres le nombre à multiplier; ensuite par le second, & ainsi des autres, mettant le premier produit de chacune de ces multiplications partiales sous le caractere qui a multiplié. Après cela l'on ajoute dans une somme ces multiplications partiales, dont l'addition donne le nombre qu'on cherchoit.*

Nous l'avons déja dit, l'artifice de ces quatre premieres opérations dont nous parlons dans cette section, consiste à faire par parties ce qu'on ne pourroit faire tout à la fois. La multiplication n'a rien de plus difficile que l'addition. Il ne s'agit que d'exprimer sur le papier une certaine somme ou produit,

plaçant bien les chiffres dans le rang qui leur convient.

Exemple. 84 eſt le nombre à multiplier par le multiplicateur 26 ; on demande quel eſt le produit de cette multiplication ? Je place 26 ſous 84, après je multiplie premierement 84 par 6, diſant 6 fois 4 fait 24, je poſe 4, & retiens 2 dixaines ; 6 fois 8 font 48, lequel produit avec 2 que j'avois retenu, fait 50 : j'écris donc 50 après 4. Enſuite je multiplie le même nombre 84 par le deuxiéme chiffre du multiplicateur 26, qui eſt 2 ; & je dis 2 fois 4 fait 8. Or il faut remarquer que ce 2 valant 2 dixaines, c'eſt la même choſe que ſi je diſois 20 fois 4 fait 8 dixaines ; j'écris donc 8 ſous le deuxiéme rang, qui eſt celui des dixaines : après je dis 2 fois 8 font 16, je poſe 6 dans le troiſiéme rang, & 1 dans le quatriéme, car 20 fois 8 dixaines valent 16 centaines ou cent ſoixante dixaines, c'eſt-à-dire, ſeize cens unités ; ainſi ces rangs conviennent à 1 & à 6. Ces deux multiplications étant faites, j'ajoute les deux produits dans une ſomme, qui eſt 2184, produit de 84, multiplié par 26.

$$\begin{array}{r} 84 \\ \underline{26} \\ 504 \\ \underline{168} \\ 2184 \end{array}$$

3°. *Dans une multiplication, lorſque les zéro ſe trouvent au commencement, ſoit du multiplicateur, ſoit du nombre à multiplier, on multiplie les nombres par les nombres, & on place après les produits, les zéro, tant du multiplicateur que du nombre à multiplier.*

Exemple. Que 80 ſoit à multiplier par 60, je place 60 ſous le nombre à multiplier 80 ; après cela je multiplie 80 par le premier caractere du multiplicateur 60, qui eſt un zéro, ce qui ne produiſant rien ; je marque un zéro ſous le rang des unités.

Ensuite multipliant 80 par 6, & premierement zéro par 6, cette multiplication n'ayant aucun produit, puisque 6 fois rien ne vaut pas plus qu'un rien, je place un zéro sous le rang des dixaines; enfin je multiplie 8 par 6, dont le produit est 48: je place 8 dans le rang des centaines, & 4 dans le rang des mille: & je trouve que 80 par 60 fait 4800. Ainsi vous voyez que dans de semblables exemples, il suffit, suivant la regle précédente, de multiplier les chiffres par les chiffres, 8 par 6; & de placer ensuite les zéro de la somme qui doit être multipliée, & ceux du multiplicateur. Ces zéro servent seulement à faire connoître que ce nombre 4800 est fait de la multiplication de 8 dixaines par 6 dixaines: ce qui fait 48 centaines.

80
60
4800

4°. *Quand le multiplicateur est* 1, *avec un ou plusieurs zéro, il faut seulement placer après le nombre qui doit être multiplié, les zéro de ce multiplicateur; mais si c'est le nombre à multiplier, qui est* 1 *avec un ou plusieurs zéro, alors il faut placer ces zéro après le multiplicateur.*

Exemple. Je veux multiplier 342 par 100; pour faire cette opération, j'écris seulement après le nombre à multiplier 342, les deux zéro du multiplicateur 100, ce qui fait 34200, lequel nombre est le produit de cette multiplication. La certitude de cette opération est manifeste: en multipliant 342 par 100, je cherche un nombre qui vaille cent fois 342. Or pour augmenter la valeur de 342 de cent fois plus que ces caracteres ne valent, il n'y a qu'à les reculer de deux rangs, ce qui se fait en mettant deux zéro après 342, de cette sorte 34200; car 2 pour lors vaudra cent fois plus qu'il ne valoit; 4 qui est le deuxiéme chiffre, cent

342
100
34200

ois plus qu'il ne valoit, ſçavoir 4 mille, & 3 vaulra 30 mille, ce qui eſt cent fois plus qu'il ne vaoit auparavant. Mais ſi c'eſt 100 qu'il faut multilier par le multiplicateur 342, j'écris après lui les leux zéro du nombre à multiplier, & cela donne le même nombre 34200 comme il eſt évident : car cent fois 342, & trois cens quarante deux fois 100 font une même choſe.

100
342
―――
34200

5°. *Les zéro ne multiplient point, puiſque cent rien, ne valent pas plus qu'un rien : cependant, il faut marquer ces zéro pour remplir la place où ils ſe trouvent, & pour conſerver la valeur des nombres qui ſuivent & qui précédent.*

EXEMPLE. Soit donné le nombre 670 pour être multiplié; le multiplicateur eſt 305 ; je diſpoſe ces nombres comme il a été enſeigné. Je commence l'opération par 5, premier caractere du multiplicateur, & je dis 5 fois zéro, ou cinq fois rien, ne produit rien; je marque cependant un zéro pour remplir ce premier rang, afin de conſerver la valeur des chiffres ſuivans; enſuite je dis 5 fois 7 font 35, je poſe 5, qui vaut 5 dixaines, dans le rang des dixaines, & je retiens 3 centaines, après je dis 5 fois 6 font 30, qui avec les trois centaines que j'ai réſervées, fait trois mille, plus 3 centaines; je place ces mille & ces centaines dans leur propre rang.

670
305
―――
3350

Je viens au deuxiéme caractere du multiplicateur 305, qui eſt un zéro, & parce que zéro ne peut multiplier 670, je marque ſeulement un zéro ſous ce deuxiéme rang, pour conſerver, comme j'ai déja dit, la valeur des caracteres ſuivans. Je viens au troiſiéme chiffre, qui eſt 3, par lequel je multiplie 670, diſant 3 fois

670
305
―――
3350
0
2010
―――
204350

zéro ne produit rien ; je marque cependant un zéro dans le troisiéme rang : 3 fois 7 font 21, je place 1 dans le quatriéme rang, réservant 2 pour le cinquiéme. Enfin je dis 3 fois 6 font 18, qui avec les 2 que j'avois reservé, font 20, que je marque dans le rang qui convient.

Après j'ajoute ces trois multiplications partiales en une somme, qui est 204350, produit de 670, multiplié par 305.

CHAPITRE IV.

QUATRIEME OPERATION.

DIVISION.

Définition de la Division.

27. *LA Division est une espece de soustraction, par laquelle on retranche d'un grand nombre un autre nombre plus petit ou égal, autant de fois qu'on le peut, c'est-à-dire, autant de fois qu'il y est contenu.*

Le premier nombre s'appelle *le dividende* ou *nombre à diviser*, & le deuxiéme *le diviseur.* Le nombre qui exprime combien *le diviseur* est contenu dans celui qui est à diviser, s'appelle le *quotient* de la division.

Ce quotient est contenu dans le nombre à diviser autant de fois qu'il y a d'unités dans le diviseur ; c'est pourquoi on se sert de cette regle, lorsqu'on veut partager un grand nombre donné. Diviser 24 par 6, c'est chercher combien 6 est contenu de fois dans 24. Il y est contenu quatre fois : ainsi ce nombre 4 est le quotient de cette

division, lequel quotient eſt contenu autant de fois dans 24, qui eſt le nombre à diviſer, qu'il y a d'unités dans 6, qui eſt le diviſeur.

PROPOSITION CINQUIEME.

PROBLEME QUATRIEME.

Diviſer un nombre donné par un autre donné.

I. *Il faut écrire le diviſeur ſous les premiers chiffres du nombre à diviſer, commençant de gauche à droite, faiſant le contraire de ce qui a été fait dans les Opérations précédentes; après cela l'on doit voir combien le diviſeur eſt contenu dans le nombre à diviſer, & écrire le quotient de cette diviſion à part.* 18.

Exemple. Que ce nombre 64 ſoit donné à diviſer par le diviſeur 2. 1°. Je place le diviſeur 2 ſous 6, premier caractere du dividende 64, commençant de gauche à droite. 2°. Je vois combien 2 eſt contenu de fois dans 6, il y eſt contenu 3 fois, lequel 3 je poſe à part, comme vous voyez. 3°. Je multiplie 3 par 2, le produit eſt 6, que j'ôte du nombre à diviſer 6, pour m'aſſurer que la diviſion de 6 par 2 eſt bien faite: car ſi ôtant 3 fois 2 de 6, il ne reſte rien, c'eſt une preuve que 3 fois 2 ſont les parties de 6, & par conſéquent que 2 eſt véritablement 3 fois en 6. Je fais la même choſe dans toutes les opérations de la diviſion.

64	3
2	

Il reſte encore à diviſer 4 par 2, ce qui ſe fait en avançant le diviſeur 2, & le plaçant ſous 4, comme nous l'enſeignerons dans l'article VI. ci-deſſous.

II. *Si le diviſeur a pluſieurs caracteres, on conſidere ſeulement combien ſon premier caractere de*

gauche à droite est contenu dans le nombre sous lequel il est placé; après on multiplie tout le diviseur par le quotient, & on retranche le produit de cette multiplication, du nombre divisé, laquelle soustraction fait connoître si on a bien divisé.

Exemple. Soit le nombre donné 84, pour être divisé par le diviseur 42: je dispose ces nombres comme il a été enseigné: je ne cherche pas d'abord combien tout le diviseur 42 est contenu dans le nombre 84, je vois simplement combien 4 est contenu dans 8: il y est 2 fois, ce que je marque; mais aussi pour m'assurer si tout le diviseur 42 est véritablement 2 fois dans le nombre à diviser 84, & si par conséquent 2 est le quotient de cette division, je multiplie ce diviseur entier par le quotient 2, & trouvant que 2 fois 42 font 84, je ne puis plus douter que l'opération que j'ai faite, ne soit certaine.

$$\left.\frac{84}{42}\right\}\quad 2$$

Tout l'artifice de cette opération, comme des trois précédentes, ne consiste qu'en cela seul, qu'on fait par partie avec facilité ce qu'on ne pourroit faire tout d'un coup sans peine, & sans danger de se tromper.

III. *Si ayant multiplié le diviseur par le quotient, il se trouve que le produit est plus grand que le nombre à diviser, c'est une marque que ce quotient est trop grand, & qu'il en faut prendre un plus petit.*

IV. *Si le diviseur n'est pas contenu exactement, c'est-à-dire, un certain nombre de fois dans le nombre à diviser, il faut marquer à part ce reste.*

Exemple. 82 est le nombre donné pour être divisé; le diviseur est 24; le premier chiffre du diviseur 24, qui est 2, est 4 fois dans 8, premier chiffre du nombre à diviser; mais parce qu'ayant

multiplié par ce quotient 4 le diviseur 24, le produit est 96, qui est plus grand que le nombre à diviser 82, je reconnoîs que ce quotient est trop grand; j'en prends donc un plus petit: sçavoir, 3. Je multiplie 24 par ce quotient, 3, & j'en ôte le produit du nombre à diviser 82, disant 3 fois 2 font 6, que j'ôte de 8, reste 2; j'efface 8, & j'écris 2; ensuite 3 fois 4 font 12 que j'ôte de 22, & reste 10, j'efface 22, & j'écris 10; ainsi 24 est contenu 3 fois dans 82 avec ce reste 10. Lorsqu'on parlera des nombres rompus, on enseignera les moyens de diviser exactement ces restes qu'on écrit comme vous le voyez, après le quotient sur une ligne, & sous cette ligne, le diviseur: C'est un nombre rompu que ce nombre. $\frac{10}{24}$

1 20 82 24	3	$\frac{10}{24}$

V. *Si le diviseur n'est point contenu dans les premiers chiffres du nombre à diviser, sous lesquels on l'a placé, il faut le faire avancer sous les caracteres qui précédent vers la droite.*

Exemple. Soit le nombre donné pour être divisé 248, & le diviseur 62. Ce diviseur n'est contenu aucune fois dans 24, premiers chiffres du nombre à diviser de la gauche à la droite. Je place donc, suivant cette regle, 62 sous 48: & faisant comme ci-dessus, je trouve que 6 est 4 fois dans 24, ce que je marque. Je multiplie le diviseur 62 par ce quotient, disant 4 fois 6 font 24, que j'ôte de 24, & il ne reste rien; après cela je dis 4 fois 2 font 8, que j'ôte de 8, il ne reste rien; ainsi je sçai que 62 est véritablement contenu 4 fois dans 248.

248 62	4

VI. *Après que l'on a divisé les premiers carac-*

teres du nombre à diviser, il faut avancer le diviseur de la gauche à la droite, jusqu'à ce que l'on ait divisé tout le nombre donné.

EXEMPLE. Dans l'article premier ayant divisé le premier chiffre 6, du nombre à diviser 64, par le diviseur 2, ce qui a donné 3 au quotient : pour achever l'opération, j'avance le diviseur 2, & je le place sous 4, effaçant, pour ne pas m'embrouiller, celui qui est dessous 6, & 6 lui-même. J'ai trouvé après cela que 2 est contenu 2 fois dans 4, ce que je marque après le premier quotient 3 ; je multiplie le diviseur 2 par le dernier quotient trouvé qui est 2, le produit est 4, que je retranche de 4, & il ne reste rien. Ainsi 2 est véritablement contenu deux fois dans 4, & le véritable quotient de 64 divisé par 2 est 32, ce que je voulois sçavoir.

64
22 } 32

Autre Exemple. Soit le nombre 8678 à diviser par 34; après avoir mis ces nombres dans leur place, je dis 3 est contenu deux fois dans 8, ce que je marque 2 au quotient. Je multiplie 3 par 2, le produit est 6, que j'ôte de 8, le reste est 2, ce que je marque, comme vous le voyez. Je multiplie 4, second chiffre du diviseur par le quotient 2, disant 2 fois 4 font 8 que j'ôte de 26, le reste est 18.

1
1 7
2 8 2
8 6 7 8 } $255 \frac{8}{34}$
34 . .
34

Je fais avancer le diviseur, & je dis 3 est contenu 6 fois dans 18, mais ce quotient étant trop grand, j'en prends un plus petit, sçavoir 5, & je dis 5 fois 3 font 15, que j'ôte de 18, il reste 3. Je multiplie 4, second chiffre du diviseur, par ce quotient 5, disant cinq fois 4 font 20, que j'ôte de 37, & il reste 17. Je

Je fais avancer une seconde fois le diviseur, & je dis 3 est 5 fois dans 17, je pose donc 5 au quotient; 3 fois 5 font 15, qui étant ôté de 17, le reste est 2; je multiplie par le quotient 5 l'autre chiffre du diviseur, disant 5 fois 4 font 20, de 28 ôtant 20, il reste 8.

Ainsi ayant divisé 8678 par le diviseur 34, le quotient est de 255 avec 8 de reste, lequel reste s'écrit de la maniere que nous avons dit qu'on le devoit faire.

Ce qui rend la division plus difficile que les trois premieres Opérations, c'est que considérant combien le premier chiffre du diviseur est dans le nombre à diviser sous lequel il est placé, il faut avoir égard aux chiffres qui suivent; car, comme on l'a bien compris, les regles de la division ne se donnent que pour faire par parties l'Opération. Si on le pouvoit tout d'un coup, on sauroit que 34 est 255 fois avec 8 de reste dans 8678, mais cela étoit impossible. On fait donc peu à peu ce qu'on ne peut faire tout d'un coup. D'abord on examine seulement combien de fois le premier chiffre du diviseur est dans celui du nombre à diviser sous lequel il est placé; mais en même tems on fait attention aux chiffres de tout le diviseur: lorsqu'on est venu à diviser 187 par 34, considérant que 34 ne peut pas être 6 fois dans 187, comme 3 est 6 fois dans 18, on a vû qu'il falloit prendre un quotient plus petit que 6. Quand on n'a pas choisi le quotient qu'il falloit, & qu'on a par conséquent écrit des chiffres qu'il faut effacer, pour ne se pas brouiller, il faut récrire les nombres sur lesquels on opere.

VII. *Quand le diviseur n'est pas contenu dans le nombre à diviser sous lequel on l'avoit fait avancer, il faut mettre un zéro au quotient.*

EXEMPLE. Le nombre à diviser est 24096,

le diviseur est 48; je dispose ces nombres comme il a été dit.

1°. 48 n'étant aucune fois dans 24; je fais avancer ce diviseur, & je considere combien 4 est dans 24, il y est six fois; mais parce que j'apperçois que 48 ne peut être six fois dans 240, que par conséquent ce quotient 6 est trop grand, j'en prends un plus petit, sçavoir 5. Je multiplie le diviseur 48 par ce quotient 5, le produit de cette multiplication est 240, qui étant ôté de 240, il ne reste rien. Jusqu'à présent la division est bien faite, & je sçai que 48 est contenu 5 fois dans les trois premiers caracteres du nombre à diviser 24096.

40 24096 ——— 48	5

2°. Je fais avancer le diviseur 48 en le plaçant sous 09, & parce qu'il n'est pas contenu dans ces caracteres, je place un zéro après le premier quotient 5, pour conserver la valeur de ce premier quotient, & de celui qu'on trouve ensuite.

40 24096 ——— 48	50

3°. Je fais avancer le diviseur 48 sous les caracteres 96 qui restent à diviser, & je dis 4 est en 9 2 fois; je marque ce 2 au quotient. Ensuite multipliant le diviseur 48 par ce nombre, je trouve que le produit 96 de cette multiplication est égal au nombre à diviser: par conséquent la division en a été bien faite. Ainsi 502 est le quotient de 24096 divisé par 48.

40x0 24096 ——— 48	502

VIII. *Lorsque le nombre à diviser a après lui plusieurs zero, si ce nombre peut être divisé exactement par le diviseur qui est au-dessous, cette division étant faite, on place après le quotient*

les zéro de ce nombre à diviſer, & la diviſion eſt achevée.

EXEMPLE. 800 eſt à diviſer par 4, je diviſe ſeulement 8 par 4, le quotient eſt 2, après lequel je poſe les deux zéro qui ſont après 8, & la diviſion eſt achevée, car ce quotient 2 valant le quart de 8, puiſque 8 vaut 800, ce 2 doit valoir 200: Or pour marquer que 2 eſt dans le même rang que 8, il faut mettre après lui un égal nombre de zéro.

$$\left.\frac{800}{4\,.\,.}\right\}\ 200$$

Mais ſi le dividende ne peut pas être exactement diviſé par le diviſeur qui eſt au-deſſous, il n'y a qu'à continuer l'opération, avançant le diviſeur, ainſi qu'on l'a enſeigné aux articles VI. & VII.

IX. *Lorſque le diviſeur eſt 1 avec pluſieurs zéro, & qu'il y a des zéro après le nombre à diviſer, il faut retrancher autant de zéro du nombre à diviſer, qu'il y en a dans le diviſeur, & la diviſion ſera achevée.*

EXEMPLE. Le nombre donné pour être diviſé eſt 5000, le diviſeur 10. Pour faire cette diviſion, je retranche du nombre à diviſer 5000, autant de zéro qu'il y en a au diviſeur, ſçavoir un zéro; ainſi le quotient ſera 500. En diviſant 5000 par 10, on cherche un nombre contenu 10 fois dans 5000, qui ſoit par conſéquent 10 fois plus petit que 5000; or pour faire valoir 5000 dix fois moins, il ne faut que faire venir 5 dans un rang plus avancé vers la droite; il eſt dans le quatriéme rang où il vaut mille, il faut le faire venir dans le rang des centaines, ce qui ſe fait en retranchant un zéro, après lequel retranchement il n'eſt plus que dans le troiſiéme rang.

$$\left.\frac{5000}{10\,.\,.}\right\}\ 500$$

Exemple de division. Soit ce nombre 2142178 donné pour être divisé par cet autre nombre 352.

1°. Je place 3, dernier chiffre du diviseur 352, non sous 2, dernier chiffre du nombre à diviser, mais sous 1 qui le précede; puisque 352 n'est pas contenu une fois dans 214.

2°. Je vois combien 3 est contenu dans 21, il y est contenu 7 fois: mais parce que j'apperçois que tout le diviseur 352 n'est pas contenu 7 fois dans 2142, je ne prends que 6 pour quotient; & afin de vérifier ma division, je multiplie le diviseur entier par ce quotient, disant 6 fois 3 font 18; de 21 ôtant 18, il reste 3, ce que je marque: six fois 5 font 30; de 34 ôtant 30, il reste 4: 6 fois 2 font 12; de 42 ôtant 12, il reste 30; ainsi il me reste 30178 à diviser par 352.

3
340
2142178 } 6
352

On peut dans les commencemens, pour éviter la confusion, récrire à part ce reste 30178, supposant toujours qu'il y a déja un chiffre au quotient.

3°. Je fais avancer mon diviseur, comme il a été enseigné. Or 352 est un nombre plus grand que 301, qui est le nombre de dessus: donc, selon ce qui a été dit ci-dessus, je pose un zéro au quotient.

30178 } 60
352

4°. Je fais avancer mon diviseur. Or 3 est contenu dix fois dans 30: cependant je ne prends que 8 pour quotient, parce que 9 seroit trop grand. Je vérifie mon opération, multipliant le diviseur par ce quotient 8, & disant 8 fois 3 font 24, que j'ôte de 30, il reste 6, que je marque: 8 fois 5 font 40; de 63 ôtant 40, il reste 21;

20
621
30178 } 608
352

& multipliant 2 par 8, le produit est 16, lequel je retranche de 217, il reste 201, & tout le reste du nombre à diviser est 2018.

Ceux qui commencent ne peuvent voir tout d'un 19.
coup le juste quotient qu'il faut prendre ; comme ici, où il reste à diviser 30178 par le diviseur donné 352. Après qu'on a écrit ce diviseur sous le dividende, on ne voit pas tout d'un coup pourquoi 3 étant 10 fois dans 30, on ne doit pas prendre 9 pour quotient. On conseille donc à ceux qui commencent, de prendre d'abord le plus haut quotient, comme ici 9, & ensuite multiplier à part par ce nombre 9, le diviseur 352 ; ce qui produit 3168, lequel nombre étant plus grand que 3017 sous lequel est 352, on voit que 352 n'y est pas 9 fois. On prend donc un plus petit quotient, sçavoir 8. Et pour sçavoir si on ne se trompe point encore, il faut multiplier 352 par 8 : ce qui fait 2816. Ce nombre est plus petit que 3017. L'on voit donc que 352 y est 8 fois, mais avec reste. En faisant de la sorte ces opérations à part, on ne brouille point les chiffres. Cette pratique est bonne pour ceux qui commencent. Elle est même utile & presque nécessaire à tout le monde, lorsque le diviseur & le dividende ont plusieurs chiffres ; & on ne perd pas grand temps : car de quelque maniere qu'on fasse, il faut faire les mêmes multiplications ; puisque pour vérifier si le quotient est juste, il faut le multiplier par le diviseur. Après cet avertissement, qui ne sera pas inutile, reprenons la question présente, pour la terminer.

30178	
352	

352	
9	
3168	

352	
8	
2816	

5°. Je fais avancer mon diviseur. Or 3 est contenu 6 fois dans 20, cependant je ne marque que 5 au quotient ; 5 fois 3 font 15 ; de 20 ôtant

15, il reste 5 : 5 fois 5 font 25 ; de 51 ôtant 25, il reste 26 : 5 fois 2 font 10 : de 268 ôtant 10, il reste 258.

```
  25
 568
2018 }
---- } 6085
 352 }
```

Ainsi je connois que 352 est contenu 6085 fois dans 2142178 avec reste, sçavoir 258 ; ce qui se marque ainsi $6085 \frac{258}{352}$, comme il a été dit.

Autre exemple, dans lequel on fait la soustraction comme ci-dessus, n. 13.

Il faut diviser 855270 par 3978. Ayant disposé les chiffres à l'ordinaire, ce que je fais ici de particulier, c'est qu'après avoir connu que le diviseur est deux fois dans le dividende, je commence à multiplier par le côté droit ; & je soustrais le produit à la maniere qui a été enseignée n. 13.

```
   00
  1980
 59690  }
855270  }
------  } 215
397888  }
 3977   }
  39
```

Ainsi commençant de droite à gauche, je dis, deux fois 8 font 16, que j'ôte des nombres de dessus 52 ; j'emprunte deux dixaines, & je dis, qui de 22 paye 16, reste 6, que j'écris sur 2, & je retiens en ma mémoire 2 que j'ai emprunté ; car je ne change point le chiffre 5, & je dis : 2 fois 7 font 14, qui avec 2 que j'ai conservé en ma mémoire font 16. J'emprunte encore 2 du rang suivant : & je dis, qui de 25 ôte 16, reste 9, que j'écris sur 5, & je retiens en ma mémoire 2 ; puis je dis 2 fois 9 font 18, & 2 que j'ai emprunté font

28. J'emprunte encore 2; & je dis, qui de 25 paye 20, reste 5, & je retiens 2. J'écris 5 dessus, & je dis, 2 fois 3 font 6, & 2 que j'ai retenu font 8, que je soustrais de 8, & il ne reste rien. J'avance mon diviseur à l'ordinaire, & je poursuis la division selon la méme méthode, dans laquelle il n'y a pas un si grand nombre de chiffres à changer, que dans la premiere.

La division du même nombre 855270 par 3978, faite selon la premiere méthode, se réduit à cette forme que vous voyez. Il y a bien plus de changement, que lorsqu'on fait la meme opération, selon la seconde méthode.

```
      14
     293
     598
    6984
  271690
  855270  } 215
  ------
  397888
   3977
    39
```

Autre maniere de faire la Division.

1°. *Le diviseur se met à côté du dividende au-dessus d'une petite ligne, en la maniere que vous le voyez. Si on veut, par exemple, diviser 24 par 2, on écrit.* 20.

```
24 | 2
 . |---
```

2°. *On met un point sous le premier chiffre du dividende, en commençant de la gauche à la droite, c'est-à-dire, sous 2 dans l'exemple proposé, ainsi*

```
24 | 2
.  |---
```

3°. *S'il y avoit plusieurs chiffres dans le diviseur, il faudroit mettre autant de points sous le dividende. Si, par exemple, je divisois 24 par 12, je mettrois un point sous 2, & un second sous 4; parce qu'il y a deux chiffres dans le diviseur.*

```
24 | 12
.. |---
```

4°. *Je regarde combien de fois le diviseur est contenu dans les chiffres sous lesquels j'ai marqué des points; comme dans le premier exemple, combien*

de fois 2, qui est le diviseur, est contenu dans 2, premier chiffre du dividende, sous lequel j'ai marqué un point. Je trouve qu'il y est une fois : Je marque 1 pour quotient sous le diviseur. En même tems je multiplie le quotient par le diviseur, disant : 1 fois 2 fait 2, que j'ôte du premier chiffre du dividende, & il ne reste rien. J'écris un zéro au-dessous du point, qui étoit sous le premier chiffre du dividende.

```
24 | 2
.  | 1.
```

```
24 | 2
.  | 1
0
```

5°. Je viens au second chiffre du dividende, en commençant de la gauche à la droite, & je mets un point dessous ce nombre qui est ici 4, & sous ce point j'écris 4, & dessous ce 4 encore un point, comme vous voyez. Ensuite je considere combien de fois le diviseur 2 est en 4 : il y est 2 fois. J'ecris 2 au quotient, puis multipliant le diviseur par ce quotient 2 ; je dis, 2 fois 2 font 4. J'ôte ce produit 4 du chiffre du dividende, sous lequel j'ai mis le dernier point, disant, de 4 ôtant 4, il ne reste rien ; j'écris donc un zéro. Je trouve ainsi que 2 est 12 fois dans 24.

```
24 | 2
.. | 12
04
 .
 0
```

6°. S'il y avoit plusieurs chiffres dans le dividende, il faudroit procéder de la même maniere. Par exemple, si au lieu de 24 pour dividende, il y avoit 242, il faudroit mettre un troisiéme point sous le troisiéme chiffre, qui est 2, & écrire ce 2 à côté du zéro, qui est au-dessous du 4, & mettre encore un point au-dessous. Ensuite il faut voir combien le diviseur 2 est contenu dans ce dernier chiffre du dividende ; il y est une fois ; j'écris donc 1 au quotient, à côté des chiffres déja trouvés ; après je multiplie le diviseur 2 par 1 ; j'ôte le pro-

```
242 | 2
... | 121
04
 .
 02
  .
  0
```

duit de cette multiplication du dernier chiffre du dividende, il ne reste rien; ainsi j'écris sous ce même chiffre un zéro.

7°. *La multiplication & la soustraction se font de la droite à la gauche: il n'y a pas eu occasion de la faire dans l'exemple proposé; parce que le diviseur étoit simple. C'est particulierement lorsque les diviseurs sont composés, que la facilité de cette méthode paroît. Elle ne charge point la mémoire; parce que faisant la soustraction on emprunte autant de dixaines que l'on en a besoin. Par exemple, soit* 358 *à diviser par* 39, *je trouve pour quotient* 9, *par lequel je multiplie le diviseur de la droite à la gauche, & je le soustrais de même, disant; 9 fois 9 sont* 81. *Il n'y a au dividende que* 8, *& ensuite un* 5, *qui ne font que* 58. *Sans m'embarrasser de cela, j'emprunte* 8 *dixaines dont j'ai besoin; & je dis,* 81 *de* 88, *reste* 7, *que j'écris au-dessous du* 8 *du dividende, & je retiens* 8. *Ensuite j'acheve la multiplication du diviseur par le quotient* 9, *disant; 9 fois* 3 *font* 27, *&* 8 *que j'ai retenu, font* 35, *qui ôtés du dividende, reste zéro; & ainsi je trouve que* 358 *divisé par* 39, *le quotient est* 9, *plus* $\frac{7}{39}$

$$\begin{array}{r|l} 358 & 39 \\ .. & \\ 07 & 9\frac{7}{39} \end{array}$$

8°. *Cette opération tient moins de place; & comme on n'est point obligé d'effacer les caracteres, quand il y a quelque erreur, on la remarque facilement. Si c'est dans la premiere division qu'on s'est trompé, on trouve son erreur dans le rang des chiffres qui est immédiatement au dessous du dividende. Si c'est dans la seconde division partiale, on la trouve dans le rang suivant.*

PROPOSITION SIXIEME.

THEOREME SECOND.

21. *Le quotient d'une division étant multiplié par le diviseur, ou le diviseur par le quotient (ce qui est une même chose), fait une somme égale au nombre qui a été divisé.*

Soit 24 divisé par 6, le quotient de cette division est 4, qui est une sixiéme partie de 24; étant donc pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le diviseur 6, c'est-à-dire 6 fois, il doit être égal à son tout 24, les parties prises ensemble égalant leur tout; donc le quotient d'une division étant multiplié par le diviseur, fait une somme égale au nombre qui a été divisé, ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE.

La multiplication & la division se servent de preuves réciproquement.

22. Car je suis assuré que 6 produit 24 étant multiplié par 4, si 6 est contenu 4 fois dans 24, ce que je puis sçavoir en divisant 24 par 6, le quotient est certainement 4; si 4 est une sixiéme partie de 24, ce que je puis sçavoir en multipliant le quotient 4 par 6; car si 4 multiplié par 6 fait 24, certainement 4 est une sixiéme partie de 24.

Suivant cette Regle, si je veux m'assurer que le quotient de la division de 24096 divisé par 48 est 502, je multiplie le diviseur 48 par le quotient 502; si le produit de cette multiplication est égal à 24096, je suis assuré que l'opération est bien faite: au contraire, si je voulois sçavoir certainement si 48 multipliant 502 fait véritablement

24096, je diviserois ce nombre par 48 ; si le quotient de cette division se trouvoit être 502, je ne pourrois plus douter de la certitude de cette opération.

AVERTISSEMENT.

Pour multiplier & diviser avec facilité, il faut apprendre par mémoire le produit des multiplians des neuf premiers caracteres : Par exemple, combien fait 5 fois 7 ; combien fait 6 multiplié par 6 ; & en même temps combien de fois un des neuf premiers élémens est contenu dans un nombre donné d'un ou de deux chiffres ; par exemple, combien 6 est dans 36, combien 5 est dans 40. 23.

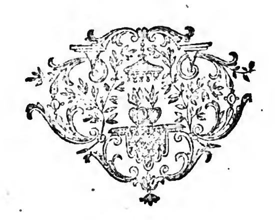
On dresse pour cela une Table, qui peut aider ceux qui commencent. Dans les deux rangs des cellules AB & AC, *sont les neuf premiers élémens & le nombre* 10.

Lorsqu'on veut sçavoir quel est le produit d'un chiffre ; par exemple, de 6 multiplié par 7, il faut chercher dans l'un des deux rangs l'un de ces deux chiffres ; par exemple, dans le rang AC, *le nombre 6, & l'autre nombre 7 dans le rang* AB ; *après cela, prenant en cette Table une cellule qui réponde à celle où est 6, dans le rang* AC, *& à celle où est 7 dans le rang* AB, *on y trouve 42, qui est le produit de 6 multiplié par 7.*

Si je veux sçavoir combien 6 est dans 42, je cherche 6 dans le rang AC, *& une cellule qui réponde à 6, où sont 42 ; après je cherche dans le rang* AB, *la cellule qui réponde à celle où est 42, où je trouve 7 ; ainsi je sçai que 6 est sept fois dans 42.*

Mais si je veux sçavoir combien 6 est dans 45, je cherche 6 dans le rang AB ; *& dans le rang qui est*

au-dessous de 6, parallele à AC, je trouve 42, & puis 48, dont l'un est plus petit, & l'autre plus grand que celui que je cherche. Ce qui me fait connoître que 6 n'est pas contenu précisement un certain nombre de fois dans 45, mais qu'il y est avec reste: partant je laisse 48 qui excede; & m'attachant uniquement à 42 qui est moindre, je remarque que la différence de 42 à 45 est 3. Ce que sçachant, je cherche dans le rang AC une cellule qui réponde à 42; j'y trouve 7. Et par-là je sçai que 6 est sept fois dans 45, avec reste, sçavoir 3. Et ainsi des autres.



TABLE

de Multiplication & de Division.

A B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

C D.

On donne des regles pour faire ces multiplications & ces divisions; mais elles sont plus curieuses qu'utiles. Ces opérations se peuvent faire sans elles, c'est pour cela que nous les omettons; car, comme nous l'avons remarqué, l'art n'est nécessaire que pour les grandes opérations. 244

SECTION TROISIEME
DES QUATRE OPERATIONS DE L'ARITHMETIQUE, AJOUTER, SOUSTRAIRE, MULTIPLIER, ET DIVISER

Sur des Grandeurs marquées avec des Lettres de l'Alphabet.

CHAPITRE PREMIER.

L'Arithmétique avec des Lettres, est ce qu'on appelle l'Algebre, elle s'applique aux grandeurs positives & négatives. Ce que c'est que ces Grandeurs.

NOUS avons dit qu'on pouvoit marquer des Grandeurs avec d'autres signes qu'avec des
75. chiffres, sçavoir avec les Lettres de l'Alphabet. Il faut donc voir comment on peut faire les quatre opérations de l'Arithmétique, en se servant de Lettres. Il dépend des hommes d'établir, pour signe d'une chose, tout caractere qu'ils voudront choisir. Celui-ci 7 signifie sept; parce qu'on est convenu qu'il signifieroit 7; ce qu'on auroit pu marquer par tout autre caractere. J'apperçois donc que l'on peut marquer les opérations

de l'Arithmétique de la maniere qu'on le voudra.

On a établi que ce signe +, qui est une ligne coupée par une autre ligne, signifieroit *plus*; & qu'une simple ligne couchée comme celle-ci —, signifieroit *moins*. Ajouter une grandeur à une autre, c'est prendre l'une avec l'autre, ou dire *l'une plus l'autre*. Ainsi on est convenu que pour ajouter ensemble deux Grandeurs marquées avec des lettres, on joindroit avec ce signe + qui signifie *plus*, les lettres qui marquent ces Grandeurs. Que par exemple, pour ajouter la Grandeur *a* avec la Grandeur *b*, on écriroit $a + b$, c'est-à-dire *a plus b*.

Soustraire une Grandeur d'une autre, c'est prendre celle-ci *moins* la premiere. Quant on dit *six pieds moins quatre pieds*, on dit qu'on a soustrait quatre pieds de six pieds. Il n'est donc question, pour marquer la soustraction d'une Grandeur marquée par lettres, d'une autre Grandeur aussi marquée par lettres, que de joindre leurs lettres avec ce signe — qui signifie *moins*. Si la premiere est *a*, dont on veut retrancher *b*, en écrivant $a - b$, on marque qu'on a retranché *b* de *a*, car cela veut dire *a* moins *b*.

Cela ne doit faire aucune difficulté. Les signes, comme on vient de le dire, sont des choses arbitraires, il n'est question que de prendre garde à ce qu'on veut qu'ils signifient. Ainsi étant convenu une fois que pour marque qu'on conçoit une Grandeur multipliée par une autre, on joindra sans autre signe les deux lettres qui marquent ces Grandeurs; pour multiplier *b* une Grandeur, par *d* autre Grandeur, je ne fais que les unir de cette sorte *bd*, sans autre signe, ou je mets entre-deux une petite croix de S. André. Ainsi $A \times B$

marque que *A* est multiplié par *B*, que c'est le produit de ces deux Grandeurs multipliées l'une par l'autre, & cela veut dire *a* multiplié par *b*.

Pour marque de la division, on met sous la lettre qui est le signe d'une Grandeur, la lettre de la seconde Grandeur par laquelle on conçoit que la premiere est divisée, une ligne entre deux. Ainsi quand on voit $\frac{a}{b}$, il faut concevoir que la Grandeur *b* est divisée par *a*, & cela veut dire *a* divisé par *b*.

Cette maniere de faire les opérations de l'Arithmétique est ce qu'on appelle *l'Algèbre*, c'est-à-dire une Arithmétique plus parfaite ; ce qu'on prétend que signifie ce nom dans la Langue des Arabes. On employe l'Algebre pour trouver des Grandeurs inconnues, qu'on ne peut pas exprimer par des nombres, pendant qu'on ignore leur valeur. Aussi il faut que de tout tems ceux qui ont travaillé sur les Mathématiques, ayent eu une espéce d'Algebre, c'est-à-dire des notes pour marquer les Grandeurs qu'ils tâchoient de découvrir. Nous ne sçavons pas quelles étoient ces notes dans les premiers temps. Depuis que l'Algebre a été plus connue, qu'on en a fait des Livres, il paroît que d'abord on n'a eu des signes que pour les Grandeurs inconnues; pour les autres, on les marquoit avec les chiffres ou nombres ordinaires. On appelloit *Nombres Cossiques* ceux de l'Algebre. Ce mot vient de l'Italien *cosa*, c'est-à-dire, *chose* ; parce que c'étoit la chose même qu'on prétendoit faire considérer par le moyen de ces notes. Et c'est dans ce même sens que l'Algebre se nomme aujourd'hui *Spécieuse ;* parce que ce sont les *especes*, ou formes des choses mêmes qu'on désigne par des lettres.

Nous parlerons des anciennes notes dans la ſuite. Elles étoient embarraſſantes, confuſes, & mêlées avec les chiffres; c'eſt ce qui avoit donné cette prévention, que l'Algebre étoit extrêmement difficile. Depuis qu'on s'y ſert des lettres de l'Alphabet, elle n'a rien que d'aiſé. J'avoue que d'abord on a peine à ſe faire à ce calcul. Les lettres ſont des ſignes fort généraux, qui n'ont point d'idées particulieres qui appliquent. Elles marquent les grandeurs dont elles ſont les ſignes, d'une maniere abſtraite; au lieu que les chiffres ont des idées particulieres & diſtinctes; car auſſi-tôt que je vois, par exemple, ces deux chiffres 12, je me repréſente douze choſes égales ou douze parties de la grandeur dont il eſt queſtion. Ceux qui ne ſont pas accoutumés au calcul par lettres, quand ils ne voyent que des lettres, il leur ſemble qu'ils ne voyent rien.

Cependant l'utilité du calcul par lettres eſt manifeſte: on ne peut appliquer des chiffres qu'à des grandeurs connues. Je ne puis point nommer des grandeurs données; l'une, par exemple, 7, l'autre 8, que je ne ſçache préciſément leur rapport ou leur valeur. Lorſqu'il s'agit donc de connoître des grandeurs inconnues, & que de la maniere qu'on en propoſe une queſtion, on apperçoit qu'en les ajoutant ou les retranchant l'une de l'autre, les multipliant l'une par l'autre, ou les diviſant, on découvrira quelque rapport qui fera connoître le reſte, il eſt néceſſaire de faire ſur elles les quatre opérations; ce que je ne puis faire avec les chiffres, ſans connoître leur juſte valeur, que je cherche encore: au lieu que je puis déſigner une grandeur en la marquant avec une lettre, quoique je ne connoiſſe point ſa valeur, parce que les lettres ne déterminent rien. Si j'appelle x *une certaine grandeur que je me propoſe de trouver, ce ſigne dont je me*

sers pour la marquer, ne dit point qu'elle ait 10, ou 20, ou 30 pieds, ou autres parties que ce soit. Je puis marquer indifféremment par cette lettre x, toute sorte de grandeur. Il est vrai qu'ayant déja employé cette lettre, pour marquer une telle grandeur, je ne puis pas, dans une meme question, me servir de cette meme lettre pour signifier des grandeurs que je ne sçai ne lui etre pas égales, à moins que je n'y ajoute, ou que je n'en retranche quelqu autre grandeur qui en fait la différence.

Un des avantages de ce calcul, c'est que les memes signes, c'est-à-dire les memes lettres, demeurent. Quand j'ajoute b avant d, écrivant b+d, ou que je multiplie b par d, écrivant bd, ces mèmes lettres b & d demeurent toujours. L'opération que je fais sur elles ne les change point; ainsi dans l'examen d'une question où il y a une longue suite d'opérations, je vois toujours le chemin que j'ai fait, & tous les rapports des grandeurs sur lesquelles j'opere; parce qu'elles conservent leurs signes. Cela n'arrive pas dans les chiffres: car si j'ajoute 5 avec 6, il vient 11, où 5 & 6 ne paroissent plus. Si je multiplie 3 par 9, je fais 27, où 3 & 9 ne paroissent plus.

C'est ce qui doit encourager à surmonter la difficulté qui paroît dans ce calcul. Je dis qui paroît, car dans le fond le calcul par lettres est plus facile que celui des chiffres. Ce que j'en ai dit, est tout ce qu'on en peut dire de plus intelligible. Ce que je vais ajouter n'est que pour faire faire attention aux suites de cette maniere de marquer les quatre opérations avec des lettres, que j'ai proposée. Vous allez voir combien cela est facile; ce qui vous surprendra, après l'idée que vous aviez conçue de l'Algebre. Cette science étoit autrefois inaccessible. L'obstacle venoit des signes embarrassans dont

on se servoit. Les signes qu'on employe aujourd'hui ne sont que des lettres de l'Alphabet, auxquelles on est accoutumé; & ces signes + & — & =, par le moyen desq els on s'exprime d'une maniere vive, courte & claire, sans presque employer de paroles. Dans l'espace de deux lignes, on dit ce qu'on ne feroit pas sans ce s co rs, dans une page entiere, employant des paroles à l'ordinaire. On le verra dans la sui e.

Un des avantages de l'Arithmétique par lettres, 26.
ou de l'Algebre, c'est qu'elle s'applique à ce qu'on appelle les Grandeurs négatives, comme à celles qui sont positives. *ositif & reel* est une même chose. Cent pistoles qu'un homme possede, c'est une grandeur réelle, ou positive. Mais on peut dire de celui qui n'a rien, & qui doit cent pistoles, qu'il a un bien négatif, c'est à dire qu'il s'en faut cent pistoles qu'il soit dans la condition d'un homme qui n'a rien, mais qui ne doit rien. Ainsi si on nomme x son état, on l'exprimera ainsi $x = 0 - 100$, ou $x + 100 = 0$; c'est-à-dire qu'afin que son bien fût égal à rien, il faudroit qu'il acquît cent pistoles.

Comme ce qui est au-dessus de zéro est une grandeur positive, ce qui descend au-dessous est une grandeur négative; ce qu'on peut concevoir dans cet autre exemple. Si *M* est le commencement d'un chemin vers *X*, tout ce que fait un Voyageur vers *X*, est comme une grandeur positive. Mais si *A* est diamétralement opposé à *X*, tout ce que fait ce Voyageur de *M* vers *A*, en s'éloignant de *X*, est une négation : cela s'appelle *moins*; comme ce qu'il fait au-delà de *M* vers *X*, en s'approchant de *X*, se doit nommer *plus*. Ce moins est une négation, ou une grandeur négative, dont — est le signe, comme + est celui

d'une grandeur positive. Partout où l'on ne voit aucun de ces deux ſignes, il faut y ſuppoſer le ſigne +

Une grandeur étant infiniment petite, on peut ſans erreur ſenſible, la ſuppoſer égale à zéro. Ainſi ayant nommé x une grandeur, & la conſidérant dans ſon commencement, comme, par exemple, le premier point d'une ligne, on peut dire que ſon premier état eſt zéro. On peut donc regarder le zéro comme un milieu entre la grandeur négative, & la poſitive. Toute grandeur poſitive ſe fait par une addition au néant. Une ligne commence par un point, qui dans ſon premier commencement eſt comme rien ; car par ce commencement on entend une choſe indiviſible, & qui ſe peut conſidérer comme un néant, tant elle eſt petite. Ces conſidérations donnent lieu de parler des grandeurs d'une maniere fort étendue, qui comprend l'infini, auſſi-bien en deſcendant qu'en montant. Car comme une grandeur peut s'augmenter à l'infini poſitivement, auſſi par la ſouſtraction on peut la diminuer à l'infini, non ſeulement en la ſubdiviſant & faiſant que de plus en plus elle approche du néant ou du zéro ; mais encore deſcendant au-deſſous du zéro infiniment. Les ſignes + & — donnent le moyen d'exprimer tout cela. On peut avec le ſigne — retrancher d'un plus petit terme un autre terme, quoique plus grand, ce qu'on ne pourroit autrement ôter ; par exemple 8 de 5 : car on peut dire 5—8 : comme ſi un homme qui n'a que cinq piſtoles en devoit 8, ſon bien ſeroit 5—8 ; car d'un côté il a cinq piſtoles, & de l'autre il en doit 8. Ainſi ces ſignes ſont d'un uſage fort étendu.

Il faut encore conſidérer ici que les Grandeurs poſitives & les négatives étant oppoſées, en aug-

mentant les unes on diminue les autres ; & qu'ainsi pour soustraire d'une grandeur négative ou la diminuer, il n'y a qu'à augmenter la grandeur positive opposée, comme nous l'allons voir.

Chapitre II.

Moyen de faire les quatre premieres opérations de l'Arithmétique sur les Grandeurs qu'on marque avec une seule lettre, qu'on appelle pour cette raison Grandeurs incomplexes *ou* simples.

De l'Addition.

On peut concevoir une Grandeur comme faite ou composée de deux Grandeurs ; ainsi, si l'on veut marquer cette composition, il faut employer deux lettres, comme, par exemple, concevoir qu'une certaine grandeur a deux parties, b & d, j'appelle cette grandeur $b+d$, ce qui me la fait nommer *Grandeur complexe* ou *composée* : au lieu que j'appelle une Grandeur que je marque avec une seule lettre, *Grandeur incomplexe* ou *simple*. Ce sont des termes qu'on invente, pour éviter les circonlocutions. 27.

Ajouter, comme on l'a dit, c'est joindre deux Grandeurs ensemble, ou exprimer par un signe, qu'on a joint ces deux Grandeurs. Ainsi il n'est question pour ajouter la grandeur b avec la grandeur d, que de les joindre par le signe de cette jonction, qui est $+$, écrivant $b+d$, ce qui vaut autant que b plus d. Il n'est donc question que de se servir des signes des quatre opérations qu'on a expliquées ; les exprimant, comme on est convenu. Il ne faut pas confondre ces signes ou ex-

pressions : car si, pour ajouter b avec d, on joignoit de près ces deux lettres sans autres signes, ainsi $b\,d$, puisqu'on est convenu que cette maniere $b\,d$ est le signe de la multiplication, on ne marqueroit pas que b est joint avec d, mais qu'on a multiplié b par d, ce qui est bien différent : car 2 ajouté à six font 8, mais deux fois 6 font douze.

On peut abréger ces signes, & il le faut, quand on le peut : car il en est des signes comme des expressions, qui donnent des idées plus nettes lorsqu'elles sont simples. Ainsi $b+b+b+b$ signifiant que b est ajouté quatre fois, au lieu de cette longue expression, j'écris $4b$, ce qui est la même chose.

Souvenez vous qu'on est convenu (car les signes ne signifient que ce qu'on convient qu'ils signifieront) que lorsque le chiffre est devant la lettre, il marque une addition : ici, par exemple, dans $4b$, que b est ajouté quatre fois à lui-même ; mais b^4 marque, comme on le dira, que b est multiplié trois fois par lui-même. Afin qu'on ne s'y trompe pas, on fait ensorte que le chiffre qui est après la lettre ne se trouve pas exactement dans la même ligne, comme vous voyez ici b^4. On peut mettre le signe $+$ devant une lettre qui n'a point de signe, quand on sçait d'ailleurs que la grandeur qu'elle marque est positive. Ainsi dans cette expression $b+d$, je puis mettre $+$ devant b ; $+b+d$.

Exemples d'Addition.

à ajouter	a	$3f$	$4d$	a	$3c$	xb	$8b$
	b	$2f$	x	$2b$	$4d$	zc	b
	c		$8d$			zc	$5b$
Sommes	$a+b+c$	$5f$	$12d+x$	$a+2b$	$3c+4d$	$xb+2zc$	$14b$

De la Soustraction.

Comme le signe + convient à une grandeur positive : aussi le signe — marque une grandeur négative, ou qui est moindre que rien. Ce signe — est celui de la Soustraction. Pour soustraire g de f, on joint ces deux Grandeurs par ce signe de *moins*, en cette maniere $f - g$. Ainsi la soustraction dans l'Algebre, ou l'Arithmétique par lettres, change en grandeurs négatives celles qui étoient positives. On sous-entend le signe +, quand il n'y a aucun signe. Ainsi quand on proposé d'ôter g de f, c'est comme si on proposoit d'ôter $+g$ de $+f$. Or en changeant le signe de la Grandeur qu'on veut ôter, il vient $+f - g$, où la Grandeur positive $+g$, devient négative ; de sorte que si ces lettres marquent l'état d'un homme qui a, ou qui n'a pas des pistoles, $+f$ marquera le nombre des pistoles qu'il a positivement ; & $-g$ le nombre de celles qui lui manquent ou qu'il doit. Plus une grandeur, moins la même grandeur, ce n'est rien. Ces deux signes + & — se détruisent, c'est pourquoi on peut abréger une opération, & en rendre l'expression plus nette, effaçant autant de fois les lettres qui marquent la grandeur dont on veut retrancher, que ces lettres se trouvent de fois dans celles qu'on veut retrancher : ainsi pour retrancher $2b$ de $5b$, il faut ôter de $5b$ deux fois b, le reste $3b$ est ce que l'on cherche. Car $+2b - 2b$ ce n'est rien. 28.

Exemples de Soustraction.

D'où il faut soustraire	$5b$ $2b$	$4d$ d	f f	b d	$3c$ $2b$	ab cd
Reste	$3b$	$3d$	0	$b - d$	$3c - 2b$	$ab - cd$

Remarquez que la soustraction d'une grandeur négative, d'une autre grandeur négative, se fait par une addition. Nous avons vû que les grandeurs négatives & positives étant opposées, en diminuant les unes on augmente les autres. En diminuant les dettes d'un homme, on augmente son bien.

De la Multiplication.

Pour la Multiplication on joint simplement la Grandeur que l'on veut multiplier l'une
29. par l'autre. Pour multiplier b par d on écrit bd. Pour multiplier b par 3, on écrit $3b$. S'il y a des chiffres joints avec les lettres, on les multiplie comme il a été enseigné; ainsi pour multiplier $3b$ par $2b$, on multiplie 3 par 2; ce qui fait 6, & on joint b avec b, le produit de cette multiplication est $6bb$. Il ne faut point chercher de démonstration de toutes ces choses-là. Ces manieres d'ajouter, soustraire, multiplier & diviser toutes sortes de grandeurs, ne sont que des signes de ce que l'on suppose être fait : ainsi, si j'écris bb, je témoigne par cette marque que je suppose, que la Grandeur désignée par la lettre b a été multipliée par b, c'est-à-dire par elle-même. On a dit qu'on se servoit quelquefois d'une petite croix de saint André pour signe de la multiplication : que $A \times B$ est une note qui marque que A & B sont multipliés l'une par l'autre.

Pour abréger, lorsqu'on multiplie une Grandeur par elle-même, on met après la lettre qui la marque, un chiffre qui signifie combien de fois elle a été multipliée : ainsi multipliant b par b, cela fait bb; & derechef par b; cela fait bbb, pour abréger on écrit b^3. Remarquez donc encore une fois que $3b$ n'est pas la même chose que b^3; car si b vaut 2, en

en diſant 3 fois b on dit 3 fois 2 ; ce qui fait 6. Mais puiſque b^2 eſt la même choſe que bb, vous voyez que bbb doit valoir 8 ; car 2 par 2 fait 4 & 4 par 2 fait 8. Quand on écrit $2b$ c'eſt une marque que l'on ſuppoſe que b eſt ajouté à b ; mais quand on écrit bb ou b^2, c'eſt une marque que l'on ſuppoſe que b eſt multiplié par b. 3 ajouté à 3 ne fait que 6 ; mais 3 multiplié par 3 fait 9.

Exemples de Multiplication.

A multiplier.	a	a	b	ab	aa
Multiplicateur.	b	a	$2b$	cd	ab
Produit.	ab	aa ou a^2	$2bb$	$abcd$	$a^3 b$ ou $aaab$

A multiplier.	$2a$	$2b$	$3ab$	$6a^3$
Multiplicateur.	$3b$	c	$2cd$	$2a^3$
Produit.	$6ab$	$2bc$	$6abcd$	$12a^6$

Dans le dernier exemple, $6a^3$ multiplié par $2a^3$, on ſera ſurpris comment le produit en eſt $12a^6$. Nous avons dit que a^3 eſt la même choſe que aaa : or en multipliant $6aaa$ par $2aaa$, le produit eſt $12aaaaaa$, partant pour abréger, comme il a été dit, au lieu de $aaaaaa$, on doit mettre un 6 après a, qui marque combien de fois on doit concevoir que cette lettre eſt répétée.

De la Division.

La marque de la diviſion eſt une petite ligne, 30
au-deſſous de laquelle on place le diviſeur, &

au dessus la Grandeur donnée pour être divisée: ainsi $\frac{c}{b}$ est une marque qu'on suppose que *b* est divisé par *c*.

Nous avons déja remarqué qu'il étoit utile de rendre les expressions les plus simples qu'on le pouvoit; parce qu'elles donnent les idées plus simples, & par conséquent plus nettes. Or il est facile d'abréger l'opération dont il est ici question. Avant que d'en proposer le moyen, il faut relire ou rappeller dans sa mémoire la Proposition sixiéme, § n. 21. On y a démontré que le quotient d'une division multipliant le diviseur, produit la somme qui avoit été divisée: ainsi le quotient doit être une grandeur qui multipliée par le diviseur, produit la grandeur qu'il faut diviser; par conséquent *bc* étant proposé pour être divisé par *c*, il est manifeste que le quotient sera *b*: car *b* multipliant le diviseur *c*, fait la somme *bc*, qui avoit été divisée. La division défait ce qu'avoit fait la multiplication. On donne donc cette regle générale pour faire les divisions, qu'il faut effacer des Grandeurs à diviser, les lettres qui se trouvent dans le diviseur. Suivant cette Regle, pour diviser *bcd* par *cd*, il faut effacer de *bcd* les lettres *c* & *d* qui se trouvent dans le diviseur *cd* & dans la Grandeur à diviser *bcd*. Le quotient sera donc *b*, comme il est évident, puisque multipliant par ce quotient *b* le diviseur *cd*, cela fait *bcd*, qui est la grandeur qui a été proposée pour être divisée.

Lorsqu'il y a des chiffres on les divise, comme il a été enseigné dans la division des nombres. Pour diviser 6*bb* par 3*b*, on divise *bb* par *b*; le quotient est *b*, & 6 par 3, le quotient est 2: ainsi le quotient de 6*bb*, divisé par 3*b*, est 2*b*. Car 2*b* multipliant 3*b*, produit 6*bb*.

Exemples de Divisions.

Il faut diviser	ab	b	a^3	abc	a^3b	$6ab$
par	a	b	a	a	a^2b	$2b$
quot.	b	1	a^2	bc	a	$2a$

Dans toutes ces divisions, pour être assuré que l'opération est bonne, il ne faut que multiplier le quotient par le diviseur; si le produit est égal au dividende, selon ce qu'on a dit touchant la preuve des divisions avec les chiffres, cette division par lettres sera bonne.

Il est évident qu'en divisant une grandeur par elle-même, le quotient est 1 : divisant b par b le quotient est 1; car une grandeur est contenue une fois en elle-même.

Chapitre III.

Opérations de l'Arithmétique sur les Grandeurs complexes ou composées.

L'Addition des Grandeurs complexes ou composées, n'a pas plus de difficulté que celles des Grandeurs incomplexes, il faut seulement joindre par le signe $+$ les Grandeurs que l'on veut ajouter les unes aux autres. Par exemple, pour ajouter $b+c$ avec $f+g$, il faut joindre ces deux Grandeurs complexes par le signe $+$ en cette maniere $b+c+f+g$. Pour ajouter $b+c$ avec $d-f$, il faut écrire $b+c+d-f$. 31.

Pour abréger, lorsqu'à une grandeur on ajoute

la même grandeur, on met un chiffre qui marque combien de fois on suppose que cette grandeur est ajoutée à elle-même, comme on a fait ci-dessus : ainsi ayant à ajouter $c+d$ avec $c+d$, au lieu de $c+d+c+d$, on fait cette addition en cette sorte, $2c+2d$. Si les Grandeurs données sont $c-d$ & $c-d$, on fait l'addition de la même maniere $2c-2d$.

Lorsque les Grandeurs qu'on doit ajouter sont les mêmes, & qu'elles ont des signes contraires, il faut retrancher les lettres qui se trouvent d'une part avec le signe $+$, & de l'autre part avec le signe $-$, comme s'il falloit ajouter $3b+2d$, à $2b-2d$; puisque dans la premiere grandeur il se trouve $+2d$, & dans l'autre $-2d$, je retranche $2d$, qui se trouve d'une part avec $+$, & de l'autre avec $-$; ainsi la somme de cette addition est $5b$. La raison pourquoi on supprime entierement $2d$, est manifeste : car le signe $-$ détruit ce que fait le signe $+$, ainsi il ne reste rien. Plus $2d$ & moins $2d$, ne font rien. En ôtant tout ce qu'on avoit mis, il ne reste rien.

Nous en avons fait un Axiôme qu'il faut avoir présent à l'esprit, pour abréger ces opérations, en rendre les expressions plus nettes, & pour juger des opérations que d'autres ont fait. Car il arrive souvent qu'on ne conçoit pas la vérité d'une opération; parce qu'on n'y voit point de certaines lettres qu'on juge y devoir paroître, lorsqu'on n'apperçoit pas que se trouvant avec des signes contraires, on a dû les supprimer.

Par exemple, ajoutant $4f+6g$ à $3f-4g$, l'addition sera $7f+2g$; car $+6g$ est égal à $+4g+2g$: or, selon ce qu'on vient de dire, pour ajouter $+4g+2g$ avec $-4g$; il faut entierement supprimer $4g$: ainsi il ne reste rien que $+2g$,

EXEMPLES D'ADDITION.

A	$a + 3b$	$2a - b$	$aa - 5a + 6$
ajouter.	$a + 2b$	$3a - 3b$	$aa + a - 6$
Somme	$2a + 5b$	$5a - 4b$	$2aa - 4a.$

A	$a - d$	$aa + 2a - 3$	$2a^3 + b^2 + 3$
ajouter	$a + 4d$	$aa + a - 6$	$a^3 + b^2 - 2$
ſomme	$2a + 3d$	$2aa + 3a - 9$	$3a^3 + 2b^2 +$ [illegible]

A ajouter.	$3a + 4b - 6c$	$20m + 10n + 40x$
	$4a - 2b - 3c$	$1m - 30n - 20x$
	$7a + 12b + 2c$	$40m + 9n + 50x$
Somme	$14a + 14b - 7c$	$61m - 11n + 70x$

DE LA SOUSTRACTION.

IL faut ici, comme dans la Souſtraction des Grandeurs incomplexes, ſe ſervir du ſigne de la Souſtraction, joignant par le ſigne — la grandeur qu'on veut ſouſtraire, avec celle de laquelle on la veut ſouſtraire. Pour ôter $b + d$ de $c + f$, il faut premierement écrire $c + f - b$: & parce que ce n'eſt pas ſeulement b qu'il faut retrancher, mais encore $+ d$, on doit marquer ces deux ſouſtractions par deux ſignes de ſouſtraction en cette maniere $c + f - b - d$. 32.

On l'a déja remarqué, & il eſt aiſé de voir que par la ſouſtraction on change les grandeurs qu'on retranche, & que de poſitives qu'elles étoient, on fait qu'elles deviennent négatives. C'eſt pourquoi on donne cette Regle générale, qu'il faut changer les ſignes de la grandeur qu'on veut ſou-

ſtraire. Vous vous ſouvenez que nous avons dit que devant une grandeur qui n'eſt précédée d'aucun ſigne, celui-ci $+$ y peut être ſous-entendu. Suivant cette Regle, pour ſouſtraire $b+d$, ou $+b+d$ de $c+f$, il faut changer les deux ſignes de $+b+d$ en cette maniere $c+f-b-d$, comme il a été dit.

Cette Regle ſe trouve toujours véritable; car lorſque le ſigne $-$ ſe rencontre dans la grandeur qu'on veut ſouſtraire: comme ici, ſi on veut ſouſtraire $b-d$ ou $+b-d$ de $c+f$, il faut changer ces ſignes $+b-d$ en des ſignes contraires de cette ſorte $c+f-b+d$. Quand on ſouſtrait $b-d$ de $c+f$, on ne veut pas ôter entierement la grandeur b, il s'en faut la grandeur d: ainſi ayant mis $c+f-b$; on retranche de $c+f$ plus qu'il ne faut retrancher; ſçavoir la grandeur d, c'eſt pourquoi on l'ajoute, lui donnant le ſigne $+$ en cette maniere $c+f-b+d$. Selon cette regle, ayant ſouſtrait $b-d$ de $c-f$, le reſte eſt $c-f-b+d$.

On peut abréger les expreſſions d'une ſouſtraction, en obſervant deux choſes dont nous avons déja parlé. 1°. Lorſqu'il faut ajouter des grandeurs exprimées par les mêmes lettres, il ſuffit de mettre devant une de ces lettres un chiffre qui marque combien elle eſt ajoutée de fois à elle-même, comme au lieu de $b+b+b+2b$, on peut mettre $5b$. 2°. Puiſque $+$ une grandeur $-$ la même grandeur, cela ne fait rien: $+b-b$ égal à zéro, on peut ſans diminuer la valeur d'une expreſſion, ſupprimer les lettres qui ſe trouvent avec le ſigne $+$ & avec le ſigne $-$; par conſéquent ôtant $+c+f$ de $c+d+f$, comme cela fait $c+d+f-c-f$, en retranchant les lettres c & f qui ont des ſignes contraires, le reſte de cette ſouſtraction eſt $+d$.

Si l'on soustrait $a-b$ de $3a+b$, selon la Regle générale, après la soustraction, il reste $3a+b-a+b$. Or on peut abreger cette expression : car $3a-a$ ne font que $2a$, & $+b+b$ valent $2b$; ainsi $2a+2b$ valent autant que $3a+b-a+b$.

En retranchant $a+3b$ de $3a+2b$, selon la Regle, le reste sera $3a+2b-a-3b$. Mais puisque $3a-a$ est égal à $2a$, & que $+2b-3b$ est égal à $-b$; il est évident que $3a+2b-a-3b$ font $2a-d$.

Pour soustraire $3a-3b$ de $5a-4b$, selon la Regle générale, le reste sera $5a-4b-3a+3b$. Or 1°. $5a-3a$ est égal $2a$; 2°. d'une part on ôte $4b$, & de l'autre on ajoute $3b$, comme vous le voyez dans l'opération $5a-4b-3a+3b$: ainsi il faut supprimer $3b$, & n'en marquer qu'un avec le signe $-$ pour abréger cette expression, qui sera réduite à celle-ci $2a-b$. Soit donné $5a+2b$ dont il faut soustraire $4a+6b$, je retranche premierement $4a$ de $5a$, & il reste un a. Ensuite pour retrancher $6b$ de $2b$, comme on ne peut pas ôter d'une grandeur ce qu'elle n'a pas, après avoir supprimé $2b$ pour retrancher les $4b$ qui restent, je les retranche de la grandeur a en les liant avec cette lettre en cette maniere $a-4b$.

EXEMPLES DE SOUSTRACTIONS.

D'où il faut	$2a+5b$	$5a-4b$	$3a+2b$
soustraire	$a+b$	$3a-3b$	$a+3b$
Reste	$a+4b$	$2a-b$	$2a-b$

D'où il faut soustraire	$2a + b$ $a - b$	$3a + d$ $2a + 5d$	$2aa + 2a + 9$ $aa + a + 3$
Reste	$a + 2b$	$a - 4d$	$aa + a + 6$

D'où il faut soustraire	$25a + 12b - 14d$ $12a - 8b + 10d$	$30m - 19n + 50x + 10y$ $20m - 12n + 14x + 20y$
Reste	$13a + 20b - 24d$	$10m - 7n + 36x - 10y$

Si dans ces dernieres opérations vous n'appercevez pas comment ces soustractions donnent de tels restes, faites les opérations tout au long, & vous découvrirez sans peine comment en abrégeant une expression selon qu'il a été enseigné, ces soustractions ont les restes qui sont marqués dans les Exemples proposés.

L'Addition & la Soustraction se servent de preuves. Pour m'assurer qu'ayant retranché $a + 6b$ de $5a + 2b$, le reste est $4a - 4b$; j'ajoute $4a - 4b$ avec $a + 6b$; & trouvant que la somme est de $5a + 2b$, je suis assuré que l'opération est bonne. Au contraire, pour m'assurer que $5a + 2b$ est la somme de $4a - 4b$, & $a + 6b$, je retranche l'une de $5a + 2b$; si le reste de la soustraction donne l'autre somme, l'addition a été bien faite, comme on l'a enseigné ci-dessus.

Disons encore que pour ajouter ensemble deux grandeurs complexes, il n'y a qu'à les écrire l'une après l'autre avec leurs mêmes signes; & que pour soustraire une grandeur complexe d'une grandeur aussi complexe, il faut écrire la grandeur à soustraire après l'autre, en changeant tous les signes de celles que l'on soustrait, & réduire le tout dans l'une & l'autre opération à la plus simple expres-

sion. Par exemple, si l'on veut ajouter $3a+4c-5b+8$ *avec* $4a-2c-2b+4$, *l'on écrira* $3a+4c-5b+8+4a-2c-2b+4$, *ce qui se réduit à* $7a+2c-7b+12$.

De même, si l'on veut soustraire $3a+4c-5b+8$ *de* $4a-2c-2b+4$, *l'on écrira tout de suite* $4a-2c-2b+4-3a-4c+5b-8$: *ce qui se réduit à* $a-6c+3b-4$. *Il n'est point nécessaire en ces opérations d'écrire les termes semblables sous les semblables : si nous l'avons fait, ce n'étoit que pour représenter aux yeux ces opérations.*

De la Multiplication.

La multiplication des grandeurs complexes se fait presque de la même maniere que la multiplication des nombres qui ont plusieurs chiffres. 33.
Comme dans les nombres on multiplie tous les chiffres du nombre à multiplier par chaque chiffre du multipliant ; en sorte qu'il y a autant de multiplications partiales qu'il y a de chiffres dans le multipliant : aussi dans les grandeurs composées, on multiplie toutes les parties de la grandeur à multiplier par chaque partie de la grandeur qui est la multipliante.

Soit donné $b+d$ pour être multiplié par x ; il faut multiplier b & d, qui sont les parties de la grandeur donnée, par x ; ce qui produit $xb+xd$.

Soit donnée $b+d$ pour être multipliés par $x+z$, il faut faire quatre multiplications partiales, qui seront $xb+xd+zb+zd$. On peut comprendre dans trois Regles tous les différens cas de cette opération.

Premiere Regle.

34. Lorſque les deux grandeurs données ont le ſigne $+$, leur produit doit avoir le même ſigne : ainſi multipliant $b+d$ par $x+z$, le produit eſt, comme nous avons vû, $xb+xd+zb+zd$.

Seconde Regle.

35. Plus en moins, ou moins en plus, donne un produit qui doit avoir le ſigne $-$.

C'eſt à-dire que ſi l'une des deux grandeurs a le ſigne $-$, par exemple, ſi l'on avoit donné $b-c$ pour être multiplié par $+a$, le produit de leur multiplication doit être $ab-ac$, dont la raiſon eſt évidente. Quand on multiplie $b-c$ par a, on ne veut multiplier qu'une partie de b. Ainſi ayant multiplié tout b par a, comme on a trop fait, ayant auſſi multiplié c qui doit être retranché de b; pour y remédier, on ôte autant de fois c qu'on l'avoit trop pris de fois. Le produit ab étant plus grand que celui qui eſt le véritable de toute la grandeur ac: on en retranche donc cette grandeur, en la joignant avec ab par le ſigne de la ſouſtraction qui eſt $-$, en cette maniere $ab-ac$.

Soit donné $b+d$ pour être multiplié par $x-z$, le produit ſera $xb+xd-zb-zd$. Quand on multiplie $b+d$ par $x-z$, on ne multiplie pas cette grandeur par toute la grandeur x, il s'en faut la partie z : ainſi ayant multiplié la grandeur $b+d$ par toute la grandeur x, le produit $xb+xd$ eſt plus grand que le véritable produit qu'on cherche, de la grandeur b multipliée par z, & de d multiplié par z, c'eſt-à-dire de $zb+zd$: ainſi il faut retrancher ce pro-

duit $zb + zd$, de la maniere qu'il a été enſeigné dans la ſouſtraction, écrivant $xb + xd - zb - zd$.

TROISIEME REGLE. 36.

Moins en moins en moins donne plus.

C'eſt-à-dire, que ſi les deux grandeurs qu'on multiplie ont le ſigne $-$, le produit de la multiplication de l'une par l'autre aura le ſigne $+$. Par exemple $b - d$ étant multiplié par $x - z$, le produit ſera $xb - xd - zb + zd$: Et afin qu'on comprenne cela, voici comment ſe fait l'opération. Je multiplie d'abord $b - d$ par x, & premierement b, ce qui me donne xb pour premiere multiplication partiale. Et comme je ne voulois pas multiplier toute la grandeur b par la grandeur x, qu'il s'en falloit la grandeur d; le produit xb eſt trop grand, ſçavoir de xd. Je retranche donc xd de xb par le ſigne de la ſouſtraction en cette ſorte $xb - xd$; & ainſi j'ai déja le produit des deux grandeurs à multiplier, par une des grandeurs du multipliant, ſçavoir de $b - d$ par x. Reſte encore à connoître le produit de $b - d$ par z. Mais ſi vous avez bien pris garde, en multipliant $b - d$ par x, vous l'avez auſſi multiplié par z, ce qu'il ne falloit pas faire ; car vous n'aviez pas à multiplier $b - d$ par toute la grandeur x, il s'en falloit la grandeur z: partant le produit de $b - d$ par x eſt trop grand, ſçavoir du produit de $b - d$ par z qui eſt $zb - zd$; c'eſt pourquoi auſſi je le retranche de $xb - xd$, en changeant les ſignes, ſuivant qu'il a été enſeigné dans la ſouſtraction. Ce qui me donne pour total & véritable produit $xb - xd - zb - zd$.

Ainſi pour comprendre la raiſon de cette Regle

de multiplication, moins en moins donne plus, *il n'y a qu'à se former une juste idée de la multiplication, & se souvenir de ce qui a été dit dans la soustraction* n. 32. *sans y chercher d'autre mystere; car avec ce signe* plus, *on ajoute seulement ce qu'on avoit ôté de trop.*

37. *Voici une autre preuve que* $+$ *par* $-$ *donne* $-$, *& que* $-$ *par* $-$ *donne* $+$. *On la peut passer dans la premiere lecture de cette Ouvrage; elle s'entendra plus facilement, quand on sera exercé à ce calcul.*

Soit à multiplier $a - b$ *par* $+c$, *je dis que le produit sera* $ac - bc$; *car soit* $a - b = d$: *donc.* $a = d + b$. *Ce qui étant multiplié par* $+c$ *donne* $ac = dc + bc$: *Donc* $ac - bc = dc$, & $ac - bc$ *est le produit de* $a - b$ *par* $+c$: *ce qu'il falloit démontrer.*

Soit encore $a - b$ *à multiplier par* $-c$. *Il faut prouver que le produit est* $-ac + bc$. *L'on fait comme devant*, $a - b = d$, *ou* $a = d + b$; *puisque par la démonstration précédente* $+$ *par* $-$ *donne* $-$, *en multipliant* $a = d + b$ *par* $-c$, *on aura* $-ac = -dc - bc$, *ou* $-ac + bc = -dc$. *Ainsi* $a - b$ *multiplié par* $-c$ *donne le produit* $-ac + bc$; *ce qu'il falloit démontrer.*

PREMIER EXEMPLE POUR LA MULTIPLICATION.

$$
\begin{array}{l}
4a + 12b + 8f. \\
\text{par} \quad 5a - 3b + 4f \\
\hline
20aa + 60ab + 40af - 36bb - 24bf + 32ff \\
\quad - 12ab + 16af \qquad\quad + 48bf \\
\hline
20aa + 48ab + 56af - 36bb + 24bf + 32ff
\end{array}
$$

AUTRE EXEMPLE.

	$8m - 4n - 20x$
par	$4m - 2n - 40x$

$$\begin{array}{l} 32mm - 16mn - 80mx + 8nn + 40nx + 800xx \\ \quad\; - 16mn - 320mx \qquad + 160nx \\ \hline 32mm - 32mn - 400mx + 8nn + 200nx + 800xx \end{array}$$

Comment on peut rendre les expreſſions de ces multiplications plus nettes.

Lorſque les grandeurs qu'on multiplie les unes par les autres, ont les mêmes lettres, on peut abreger l'expreſſion de leur produit. Le produit de $a + b$ par $a - b$, eſt ſelon la regle $aa + ab - ab - bb$: or puiſque $+ ab - ab$ ne fait rien ; donc $aa - bb$ eſt égal à $aa + ab - ab - bb$. Le produit de $a - b$ par $a - b$ eſt $aa - ab - ab + bb$; puiſque $- ab - ab$ eſt la même choſe que $- 2ab$; je mets donc $aa - 2ab + bb$ pour $aa - ab - ab + bb$. 38.

Le produit de $3d + e$ par $3d + e$ eſt $9dd + 6de + ee$. Celui de $3d + e$ par $3d - e$, eſt $9dd - ee$. Celui-ci de $3d - e$ par $3d - e$, eſt $9dd - 6de + ee$. Lorſque les grandeurs ſont fort compoſées, & que leurs produits ſeroient trop étendus, pour marquer ſeulement qu'il faut multiplier ces grandeurs compoſées l'une par l'autre, on les joint, mettant entre-deux cette petite croix de ſaint André ×, comme on l'a dit, & les couvrant chacune d'une ligne, ainſi $\overline{4a + 3aa - 2a + 1} \times \overline{aa - 5a + 6}$.

De la Division.

39. La Division, comme nous avons déja remarqué, défait ce que la multiplication avoit composé; ainsi pour diviser, il faut se ressouvenir des Regles précédentes de la multiplication.

Nous avons vû que la division & la multiplication se servent de preuves. On ne se peut pas tromper dans la division, pourvû qu'on observe si le quotient, en multipliant le diviseur, fait un produit égal à la grandeur qu'on a divisée: car, comme on l'a vû, § n. 21. si cela arrive, ce quotient est le véritable: ainsi $x + z$ multiplié par $b + d$, faisant le produit $xb + xd + zb + zd$, il est certain que $b + d$ est le quotient de $xb + xd + z + zd$ divisé par $x + z$. Il ne faut donc que suivre les trois Regles que nous venons de donner pour la multiplication.

1°. Puisque plus en plus donne plus, si la grandeur qui doit être divisée a le signe $+$, & que le diviseur ait le signe $+$, c'est une marque que le quotient doit avoir $+$; ainsi la grandeur $xb + xd + zb + zd$ étant donnée pour être divisée par $x + z$, il est manifeste que le quotient est $b + d$.

2°. Si la grandeur à diviser a le signe $-$, & que le diviseur ait le signe $+$, le quotient aura le signe $-$; & si le diviseur a le signe $-$, le quotient aura le signe $+$. Ainsi divisant $xb + xd - zb - zd$, par $x - z$, le quotient sera $b - d$; car $b + d$ multipliant $x - x$, fait la grandeur donnée $xb + xd - zb - zd$.

3°. Si la grandeur donnée à diviser a le signe $+$, & le diviseur le signe $-$, le quotient aura ce même signe $-$. Divisant $xb - xd - zb + zd$ par $x - z$, le quotient sera $b - d$.

Lorſque l'expreſſion d'une opération a été abrégée, pour en appercevoir le quotient, ou quels ſont les termes ſupprimés dans les produits à diviſer, & les rétablir; voici ce que l'on fait.

Soit $mm - nn$ à diviſer par $m - n$, il faut écrire le diviſeur à la gauche du dividende, comme vous le voyez.

Produit à diviſer.

Diviſeur, $m - n$	$mm - nn$ $- mm + mn$	*Quotient*, $m + n.$
	$o + mn - nn$ $- mn + nn$	

Je dis mm diviſé par $+ m$ donne $+ m$, que j'écris au quotient. Or $m - n$ du diviſeur multiplié par m du quotient donne $+ mm - mn$, que j'écris au-deſſous de toute la grandeur à diviſer, avec des ſignes contraires $- mm + mn$, comme vous voyez; & réduiſant $mm - nn - mm + mn$, l'on a $o + mn - nn$, qu'il faut encore diviſer par $m - n$. Je dis donc encore $+ mn$ diviſé par m donne $+ n$ que j'écris au quotient, & $m - n$ multiplié par n, donne $mn - nn$, qui étant détruit avec des ſignes contraires, détruit entierement le produit à diviſer $o + mn - nn$: Ainſi je ſuis aſſuré que $m + n$ eſt le quotient de $mm - nn$, diviſé par $m - n$. Lorſque dans la grandeur à diviſer on ne trouve aucune des lettres du diviſeur, c'eſt une marque qu'on ne peut faire cette diviſion qu'en plaçant au-deſſus d'une petite ligne la grandeur à diviſer, & le diviſeur au-deſſous: ainſi diviſant $bd + pq$ par $r + s$ le quotient ſera $\frac{dd + pq}{r + s}$

Je ne donne pas davantage d'exemples de toutes

ces opérations, parce que je veux que mon Ouvrage soit court. Je ne mets que des exemples faciles, écrivant pour ceux qui commencent, & qui peut-être n'auront point de Maître pour les aider. S'ils entendent mon Livre, ils seront capables d'entendre sans peine les Livres où l'on trouve des exemples de calcul par lettres plus longs & plus difficiles que ceux que je me propose. Pour les Maîtres qui voudront bien se servir de cet Ouvrage, ils doivent exercer leurs Disciples, en leur donnant plusieurs exemples.

Si on a bien compris ceux que je viens de donner, ce qu'on aura pu faire avec une légere attention : on concevra aisément tout l'artifice de ces opérations : & de soi-même, on appercevra ce qu'il faudroit faire lorsque les Grandeurs sont encore plus composées.

C'est à Descartes que nous devons cette Arithmétique par lettres, comme on la pratique aujourd'hui, & que je viens de l'enseigner. François Schooten l'ayant expliqué à Erasme Bartholin, celui-ci l'a mise par écrit, & en a composé un Livre, qui porte pour titre : Mathématique Universelle, ou Introduction à la Géométrie de Descartes. *Je renvoie à ce Livre, comme à la source, en ce qui regarde le calcul par lettres : on y trouvera grand nombre d'exemples qui donneront lieu de s'exercer, & de se perfectionner dans ce calcul.*

ELEMENS DES MATHEMATIQUES, OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GÉNÉRAL.

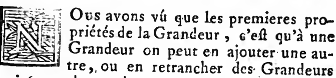
LIVRE SECOND.

SECTION PREMIERE.

Différentes Puissances ausquelles on peut élever une Grandeur, selon qu'on l'augmente par l'Addition, ou par la Multiplication.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'est que Puissance *d'une Grandeur.*



Nous avons vû que les premieres propriétés de la Grandeur, c'est qu'à une Grandeur on peut en ajouter une autre, ou en retrancher des Grandeurs qui sont plus petites; qu'on la peut multiplier

par une autre Grandeur; & qu'enfin elle peut être divisée dans les parties qu'elle contient.

Lorsqu'on traite un sujet, il ne s'agit pas toujours de rechercher des propriétés fort cachées. Il faut considérer celles qui sont les plus simples, & que l'idée ou notion naturelle du sujet présente à l'esprit. Il y a une merveilleuse simplicité dans toute la nature: les premiers principes de toutes choses sont simples; & ce qui rend la recherche des Sciences difficile, c'est qu'on ne commence pas par les premiers principes, qu'on ne les suit pas, ou qu'on ne tire pas des premieres connoissances tout ce qu'on en peut déduire. La simplicité des premieres connoissances fait qu'on les méprise.

Evitons ce défaut; & avant que de chercher d'autres propriétés de la Grandeur que celles que nous avons déja considérées, voyons si celles dont nous avons parlé, ne peuvent point encore suffire pour nous faire comprendre bien des choses qui paroissent de grands mysteres. Tout ce qu'il y a au monde ne se fait que par addition & multiplication de parties. Selon que les élémens sont ajoutés, sont multipliés & sont combinés ou joints les uns avec les autres, ils composent différens êtres. Selon aussi qu'on ajoute les grandeurs, qu'on les multiplie, qu'on les combine, on produit différentes espéces de Grandeurs.

L'usage autorisé par ceux qui écrivent sur les Mathématiques, nomme *Puissance* ce qu'une grandeur peut devenir, selon qu'elle est multipliée: & ce sont particulierement les différentes manieres de multiplier une grandeur qui en font les différentes espéces qu'on appelle Puissances. Ainsi il est évident, que puisque nous devons encore nous arrêter ici à considérer les premieres pro-

priétés de la grandeur, la méthode veut que nous parlions ici des Puissances, & en même tems de leur résolution, c'est-à-dire, que nous examinions comment on peut élever une grandeur à un certain degré de puissance, en la multipliant de telle & telle maniere; & comment, lorsqu'une grandeur d'une telle puissance est donnée, on peut, par la division, la décomposer, pour ainsi dire, & la résoudre dans les premieres parties dont elle a été composée.

CHAPITRE II.

Explication ou définition des termes dont on se doit servir, & des différentes Puissances auxquelles une Grandeur peut être élevée.

I.

UNe Grandeur qui est faite par la multiplication de deux ou de plusieurs Grandeurs, s'appelle une Grandeur de plusieurs dimensions. 1.

Ainsi la grandeur qui est marquée par ce signe *bc*, est une grandeur de deux dimensions : car ce signe veut dire que *b* a été multiplié par *c*. La grandeur *bcd* est de trois dimensions ; car elle est faite de la multiplication de ces trois grandeurs, *b*, *c*, *d*.

II.

On appelle proprement Puissance *ce qu'une grandeur devient lorsqu'on la multiplie une, ou plusieurs fois par elle-même.* 2.

Quoiqu'une grandeur, selon qu'elle est multipliée, non-seulement par elle-même, mais encore par toute autre grandeur, fasse différentes especes

de grandeurs; néanmoins parce que celles qui se font par une même multiplication réitérée, sont plus considérables, on n'appelle *Puissance* d'une Grandeur, que ce qu'elle peut devenir quand elle est multipliée une ou plusieurs fois par elle-même; & parce que, comme je le viens de dire, ces grandeurs sont les plus considérables, c'est pour cette raison que ce second Livre porte pour titre *Des Puissances*, quoiqu'on y traite encore des autres Grandeurs, qui reçoivent différens noms, selon qu'elles sont ajoutées ou multipliées.

III.

3\. *On appelle premiere Puissance, deuxieme Puissance, troisiéme Puissance, &c. un certain nombre de multiplications réitérées de la même Grandeur. Ces puissances se nomment aussi Degrés, & les chiffres qui marquent ces puissances sont les exposans de ces puissances.*

Ainsi, la premiere puissance de b, ou le premier Degré de b, c'est b même. La deuxiéme Puissance ou second Degré, c'est bb, c'est-à-dire b multiplié par b. Nous avons vû L. 1. n. 29. que pour abréger, au lieu de répéter plusieurs fois une même lettre pour marquer qu'elle a été multipliée par elle-même, on ne la marque qu'une fois: mais on y joint ensuite un petit chiffre qui marque combien de fois elle a été multipliée par elle-même. Au lieu de bb, on peut donc mettre b^2. La troisiéme Puissance ou le troisiéme Degré de b sera bbb ou b^3; la quatriéme $bbbb$ ou b^4; la cinquiéme b^5; la sixiéme b^6; ainsi de suite à l'infini, & ces nombres 2, 3, 4, 5, 6, &c. sont les exposans de ces puissances.

Euclide, avec les anciens Mathématiciens, com-
4\. paroient le point des Géometres (c'est-à-dire

une grandeur qui n'a aucune dimension) avec l'unité : ce qu'ils ne devoient pas faire. C'est le *Zéro* de l'Arithmétique qui répond au *point* de la Géométrie ; c'est cette erreur qui leur a fait appeller *premiere Puissance*, ce que nous appellons *seconde Puissance*. Ainsi *bb* est, selon eux, une premiere puissance, qui dans une maniere de parler plus juste, & qui aujourd'hui est la plus usitée, s'appelle une seconde Puissance. b^1 est la premiere, & *bb* ou b^2 est la seconde; ce qu'il faut observer pour distinguer l'ancien langage d'avec le nouveau.

IV.

Les Grandeurs, par la multiplication desquelles une grandeur de plusieurs dimensions a été produite, sont nommées les Racines de cette grandeur. 5.

La grandeur *bxz* ayant été faite par la multiplication de ces trois grandeurs *b*, *x*, *z*, ces trois grandeurs sont appellées les Racines de *bxz*. Ce nombre 24 est fait de 6 multiplié par 4. Ces deux nombres 6 & 4 sont les racines de ce nombre 24.

V.

On appelle grandeur Plane ou de deux Dimensions, une grandeur qui est faite de deux grandeurs multipliées l'une par l'autre. 6.

La grandeur *bx* est une grandeur *plane* ou de deux dimensions. Ce nombre 12 sera un nombre plan ou de deux dimensions, si on conçoit qu'il est fait de ces deux nombres 2 & 6 multipliés l'un par l'autre.

VI.

Une grandeur plane ou de deux dimensions est

dite quarrée, lorsque ses deux racines ou ses deux dimensions sont égales ; ou, ce qui est la même chose, lorsqu'elle est faite d'une grandeur multipliée par elle-même.

Ainsi *bb* est une grandeur *quarrée*, ou un *quarré*, les deux racines *b* & *b* étant égales. 16 est un nombre quarré, parce que ce nombre est fait de deux nombres égaux multipliés l'un par l'autre, sçavoir de 4 multiplié par 4, ou du même nombre 4 multiplié par lui-même, lequel nombre 4 est appellé la racine quarrée du nombre quarré 16.

VII.

7. *Le quarré est le second degré ou la seconde puissance.*

Nous venons de dire que *bb* ou b^2 est une grandeur quarrée, que c'est le quarré de *b* : or *bb* est fait de *b* par *b*, racines égales ; ainsi *bb* second degré ou seconde puissance est un quarré.

VIII.

8. *Une grandeur de trois dimensions, ou qui est faite de la multiplication de trois racines, est appellée Solide.*

Ainsi *bcd* qui a trois dimensions, & qui est fait par la multiplication de trois racines *bcd*, est une grandeur solide. Ce nombre 36 sera appellé nombre Solide, si on conçoit qu'il est fait de ces trois nombres 2, 6, 3, qui étant multipliés l'un par l'autre font 36.

IX.

9. *Cube ou grandeur cubique, est une grandeur solide, dont les trois racines ou dimensions sont égales ; ou, ce qui est la même chose, une grandeur*

cubique, est celle qui est faite premierement par une même grandeur multipliée par elle-même ; & en second lieu, de ce produit multiplié par cette même grandeur.

Ainsi *bbb* est une grandeur cubique, ses trois dimensions ou racines, *b*, *b*, *b*, étant égales. Ce nombre 27 se peut nommer cube, si on considere que 27 est fait de ces trois membres égaux, 3, 3, 3, ou de ce seul nombre 3, multiplié premierement par lui-même, ce qui fait le nombre quarré 9, & ensuite de ce quarré multiplié par 3. On appelle ce nombre 3 la Racine cubique de 27.

X.

Le cube est la troisiéme puissance. 10.

Ainsi b^3 qui est la troisiéme puissance de *b*, est un cube, puisque b^3, qui est la même chose que *bbb*, est fait de trois Racines égales.

XI.

Un quarré de quarré est une grandeur qui a pour 11.
sa racine une grandeur quarrée ; ou ce qui est la même chose, une grandeur qui est faite d'un quarré multiplié par un quarré.

Ainsi *bbbb* est une grandeur quarrée de quarré, car elle est faite de *bb* quarré, multiplié par le quarré *bb*. Ainsi comme un quarré a deux dimensions, une grandeur quarrée de quarré a quatre dimensions.

Ce nombre 16 peut être consideré comme un nombre quarré de quarré ; car la racine quarrée de 16 est 4, qui est un nombre quarré, dont la racine est 2 : ainsi ce nombre 16 est fait d'un quarré multiplié par un quarré, sçavoir de 4 par 4.

XII.

12. *Le quarré de quarré est la quatriéme puissance.*

b^4 est la quatriéme puissance. Or b^4 ou *bbbb*, est fait de quatre racines égales, ou de *bb* quarré, multiplié par *bb*; ce qui fait *bbbb*, par conséquent b^4, selon la définition précédente, est un quarré de quarré.

XIII.

13. *Sur-solide est une grandeur faite d'un quarré de quarré multiplié par la premiere racine; ou, ce qui est la même chose, c'est une grandeur faite d'un cube multiplié par le quarré de sa racine.*

Ainsi *bbbbb* est une grandeur qu'on appelle Sur-solide, parce qu'elle est faite de *bbbb* quarré de quarré multiplié par sa racine *b*; ou, si l'on veut, de *bbb* cube par *bb* quarré, ce qui donne b^5. De même 32 peut être appellé Sur-solide, si on considere que ce nombre est fait de 16, quarré de quarré, multiplié par 2, premiere racine de ce quarré de quarré, ou du cube 8 multiplié par le quarré 4, dont la racine est 2.

XIV.

14. *Le Sur-solide a cinq dimensions: ainsi c'est le cinquiéme degré ou la cinquiéme puissance.*

La grandeur *bbbbb* ou b^5 est faite de cinq racines égales; ainsi c'est une cinquiéme puissance; c'est aussi un Sur-solide, puisque c'est le produit de *bbbb*, quarré de quarré, par la racine *b*, comme nous venons de le voir. De même, selon ce que nous avons dit, le nombre 32 peut être considéré comme étant un Sur-solide.

XV.

X V.

Un quarré cube est une grandeur quarrée qui a pour sa racine un cube. 16.

Ainsi ce nombre 64 sera un quarré cube, si on conçoit ce nombre 64 comme un quarré dont la racine est 8 ; car 8 par 8 fait 64. Or 8 sera aussi un cube, en le considérant fait de 2 multiplié d'abord par lui-même, ce qui fait 4 : & de rechef 4 par 2, ce qui fait 8. Ainsi 64 ayant pour racine quarrée un cube, c'est un quarré cube.

X V I.

Le quarré cube a six dimensions ; ainsi c'est la sixiéme puissance, ou le sixiéme dégré. 17.

Car b^6 ou *bbbbbbb* est un quarré fait de *bbb* par *bbb*, laquelle grandeur *bbb* est un cube.

Une grandeur est reconnue pour quarrée, non seulement quand elle est exprimée par deux mêmes lettres, comme bb, *mais aussi quand on peut partager en deux parties égales les lettres qui composent cette grandeur ; en sorte que les mêmes lettres se trouvent en l'une & l'autre partie : ainsi* bbccdd *est une grandeur quarrée, parce qu'elle se peut diviser en* bcd & bcd, *qui se multipliant font* bbccdd. *Il en est de même des grandeurs cubes.*

Le même nombre peut recevoir différens noms, selon que l'on veut concevoir qu'il est fait par telles & telles multiplications. 64 *sera appellé Plan, si on le considere fait de* 32 *multiplié par* 2 *: quarré, si on le veut concevoir, fait de* 8 *multiplié par lui-même. Il peut aussi être appellé Cube ; car ce nombre* 64 *peut être fait de* 4 *multiplié par* 4, *ce qui fait* 16, & *de* 16 *multiplié par* 4 *: ainsi il*

est cube par la définition des nombres cubes.

Quoiqu'une Grandeur ne soit exprimée que par une seule lettre, on peut la concevoir de tant de dimensions qu'on voudra ; mais pour marquer ces dimensions, il faut joindre à cette lettre le chiffre 1 *autant qu'il le faudra ; ce qu'il est nécessaire de faire, quand on veut comparer deux grandeurs, qui n'ont pas autant de lettres les unes que les autres ; ainsi voulant comparer* x *avec* bb, *pour concevoir dans* x *deux dimensions, comme* bb *en a deux, je place* 1 *devant* x *en cette sorte* 1x. *Pour lors* 1x *&* bb *sont deux grandeurs planes : cependant* 1x *ne vaut pas davantage que* x ; *car l'unité n'augmente point la grandeur qu'elle a multipliée.*

Prenez bien garde que toute grandeur quarrée n'est pas un nombre quarré. On appelle nombre quarré celui qui est fait de la multiplication d'un nombre par soi-même, comme 9 *est un nombre quarré qui est fait de* 3 *multiplié par* 3. *C'est pourquoi* 20 *n'est pas un nombre quarré, parce qu'aucun nombre multiplié par lui-même ne peut faire* 20. *Ainsi si je suppose que* 20 *est égal à* bb, *je pourrai bien appeller* bb *une grandeur quarrée, mais non pas un nombre quarré. Il en est de même des grandeurs cubes, &c.*

CHAPITRE III.

Manieres anciennes d'exprimer les Puissances. La nouvelle maniere est plus nette & plus aisée.

18. C'Est particulierement dans l'expression des puissances que consiste ce qu'on appelle *l'Algebre* : ainsi ce sont ces expressions qui font l'obscurité ou la clarté de cette Science, selon qu'elles sont plus embarrassées ou plus simples.

Voyons quelles étoient autrefois les expressions de l'Algebre.

Les anciens Mathématiciens se sont servis de quelque espece d'Algebre, comme nous l'avons vû. On ne peut point exprimer avec les nombres une grandeur inconnue; cependant pour la trouver, il la faut marquer. Il n'est donc pas possible que ces Mathématiciens qui ont découvert tant de choses, n'ayent eu des symboles ou certains signes pour exprimer celles qu'ils cherchoient avant qu'ils les connussent. Nous ne sçavons pas quels étoient ces Symboles. C'est la maniere ou la science de se servir de ces symboles ou signes, pour marquer une chose qu'on ne connoît point, qu'on appelle *Algebre*, & qui pour cela est nommée *Symbolique* ou *Spécieuse*; parce que le signe dont elle se sert, présente l'espece ou la sorte de chose dont il est question. Les Italiens nomment *Cosa* ce que nous appellons *Chose*: ainsi ils appellent nombres *Cossiques*, les signes Algébriques, qui représentent les choses, comme nous l'avons déja remarqué. Or on ne se servoit autrefois de ces signes que pour marquer les racines & les puissances.

Les Italiens regardoient la racine d'une grandeur comme la chose même: ainsi *cosa* & *racine* ont la même signification chez eux. Ils ont nommé *Censo* ou *Zenzo*, c'est-à-dire, *Revenu*, *Rente*, la puissance quarrée qui vient de sa racine multipliée par elle-même. Pour marquer la *cosa* ou la *racine*, ils se servoient de la lettre N, ou de la lettre R. Pour marquer le quarré, ils employoient la lettre Q, par où commence ce mot *Quarré*: ou ils se servoient de la lettre Z, parce qu'ils nommoient *Zenzo* cette puissance. Ils ont aussi marqué le cube avec un C; le quarré de quarré avec

deux QQ, & avec S le surſolide. On voit dans leurs Livres d'Algebre d'autres caracteres fort biſarres, qui ſont faits des lettres italiques *r*, *z*, *c*, *ſ*, par où commencent ces noms, *racine*, *zenzo*, *cube*, *ſurſolide*.

On ne ſe ſert plus de ces ſignes, depuis qu'on a trouvé l'Arithmétique par lettres. On marque également avec elles les grandeurs connues & inconnues : ainſi il n'y a plus cette confuſion de différens ſignes, de chiffres, & de ces nombres qu'on nommoit *Coſſiques*. Seulement on diſtingue les grandeurs inconnues, en ſe ſervant pour les exprimer des derniers caracteres de l'Alphabet x, y, z. Pour les puiſſances, elles ſe marquent fort ſimplement, ajoutant à la lettre qui eſt le ſigne d'une grandeur, un petit chiffre qui indique le degré de ſa puiſſance. Ainſi x^1 eſt une racine, x^2 un quarré, x^3 un cube, x^4 une quatriéme puiſſance, x^5 une cinquiéme, x^6 une ſixiéme. Ce qu'on marquoit autrefois ainſi *AR*, *AQ* ou *AZ*, *AC*, *AQQ*, *AS*, *AQC*; ce qui veut dire racine *A*, ſon quarré, ſon cube, ſon quarré de quarré, le ſurſolide, le quarré cube. Nous n'avons pas beſoin de tous ces ſignes. Ceux dont nous nous ſervons ſont ſimples, & font un langage clair & abrégé, comme on le voit dans cet exemple.

$$xx = bb + 2bd + dd$$

ou

$$x^2 = b^2 + 2bd + d^2$$

Cette expreſſion tient lieu des paroles ſuivantes : *Le quarré de la grandeur inconnue* x *eſt égal aux deux quarrés des grandeurs connues* b *&* d, *& de plus deux fois un plan fait des racines* b *&* d

de ces deux quarrés bb & dd. Cette expression si courte est vive : les choses y sont marquées clairement : on voit ce qu'elles sont ; que *xx* est un quarré ; que *bd* est un plan, & la marque de l'égalité = montre qu'on suppose que *xx* est égal à *bb*+2*bd*+*dd*.

CHAPITRE IV.

De quelques autres especes de Grandeurs que les différentes manieres d'ajouter & de multiplier produisent.

COmme on peut multiplier en différentes manieres une grandeur, & l'ajouter à elle-même ou avec d'autres, les différentes especes de grandeurs que produisent ces différences sont infinies. Il suffit d'indiquer les plus considérables de ces especes ; car je ne prétends pas épuiser cette matiere, cela n'est pas possible. 19.

On distingue les grandeurs numériques, c'est-à-dire les grandeurs qui s'expriment avec des nombres en plusieurs ordres. Voilà les définitions qu'en donne M. Pascal dans son Traité de l'Usage du Triangle Arithmétique, où il explique leurs propriétés.

Il appelle nombres du premier ordre les simples unités.

1, 1, 1, 1, 1, 1, &c.

Nombres du second ordre, les naturels qui se forment par les additions des unités.

1, 2, 3, 4, 5, &c.

Il appelle les nombres du troisiéme ordre, ceux qui se forment par l'addition des naturels. On nomme ceux là Nombres Triangulaires.

1, 3, 6, 10, &c.

Dans cet ordre, le second terme, sçavoir 3, égale la somme des deux premiers naturels, qui sont 1 & 2, le troisiéme qui est 6 égale la somme des trois premiers naturels, 1, 2, 3, &c.

Les nombres du quatriéme ordre sont ceux qui se forment par l'addition des triangulaires, qu'on appelle Pyramidaux.

1, 4, 10, 20, &c.

C'est-à-dire que le troisiéme des Pyramidaux, qui est 10, égale la somme des trois premiers triangulaires, sçavoir de 1, 3, 6.

Les nombres du cinquiéme ordre sont ceux qui se forment par l'addition des Pyramidaux, auxquels on a donné le nom de Triangulo-triangulaires.

1, 5, 15, 36, &c.

Les nombres du sixiéme ordre sont ceux qui se forment par l'addition des précédens.

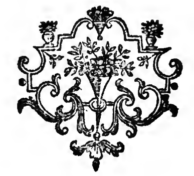
1, 6, 21, 56, &c.

Et ainsi à l'infini.

Selon que les nombres continus se multiplient les uns les autres, ils ont différens noms. Les nombres continus sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, & les autres qui suivent. Or on distingue en différentes classes ces produits: par exemple, ceux qui seront produits de deux nombres qui se suivent, font la premiere classe; ainsi 20, qui est fait de 4 multiplié par 5; & 72, qui est fait de 8 multiplié par 9, sont de la premiere classe, ou premiere espece.

Les nombres qui sont faits de la multiplication de trois nombres de suite qui se multiplient, sont de la seconde espece; ainsi 120, qui est fait de la multiplication de ces trois nombres 4, 5 & 6, qui se suivent, & 720 qui est fait de ces trois

nombres 8, 9 & 10, sont de la seconde espece, ainsi de suite à l'infini : ce qui fait voir qu'on peut inventer une infinité de différentes especes de nombres. Les premiers élémens d'une Science doivent être courts & faciles : Il ne m'est donc pas permis de renfermer ici tout ce que je pourrois y faire entrer. Je rendrois ces élémens trop difficiles & trop longs, si j'entreprenois de parler de toutes ces especes de grandeurs.



SECTION SECONDE.

DE LA COMPOSITION ET DE LA NATURE DES PUISSANCES.

CHAPITRE PREMIER.

Axiomes ou demandes touchant la composition & la nature des Puissances.

AXIOME PREMIER, OU DEMANDE PREMIERE.

20. *Le tout & toutes ses parties étant multipliés par un même multiplicateur, les produits de ces multiplications sont égaux.*

$b+d$ sont les parties de z. Cette proposition dit, que si $b+d$ & z sont multipliés par une même grandeur, comme par x, les produits seront égaux : $bx+dx=zx$. Ce qui est évident : car puisque le tout & toutes ses parties prises ensemble ne sont qu'une même chose, en multipliant le tout ou toutes ses parties par une même grandeur, on doit faire un même produit.

AXIOME SECOND OU DEMANDE SECONDE.

21. *Multipliant deux grandeurs l'une par l'autre, dans quelqu'ordre qu'on le fasse, elles feront un même produit.*

Multipliant a par b, ſoit que l'on commence par a ou par b, on fait le même produit : ab eſt la même choſe que ba. Cette propoſition, comme on voit, ne peut pas s'accommoder aux chiffres : il eſt vrai pourtant que cinq fois 6, & 6 fois 5, font toujours 30 ; mais ce n'eſt pas ce qu'on veut dire ; il ne s'agit ici que de leur ſimple diſpoſition, ou maniere de les coucher ſur le papier. Pour les lettres, cette diſpoſition eſt indifférente ; mais à l'égard des chiffres, c'eſt ce qui en fait toute la valeur ; ainſi on ne peut la troubler ni changer : 52 & 25 ne ſont pas une même choſe comme ab & ba. Cet Axiome ne s'entend que des grandeurs en elles-mêmes, ou de leur expreſſion par lettres.

Axiome III. ou Demande troisieme.

Multipliant trois grandeurs l'une par l'autre, dans quelque ordre qu'on le faſſe, elles feront un même produit. 22.

Que l'on multiplie les trois grandeurs a, b, c, les unes par les autres, les produits abc, bac, cba, acb, bca, cab, ne font qu'une même choſe.

Axiome IV. ou Demande quatriéme.

Les produits de différentes multiplications ſont égaux, s'ils ſont faits de grandeurs égales, & de multiplicateurs égaux. 23.

Il eſt évident que des grandeurs égales multipliées également, c'eſt-à-dire priſes également tant de fois, doivent faire des produits égaux.

On ſuppoſe que les Regles qu'on a données pour multiplier ſont bonnes, & qu'ainſi lorſqu'on les a ſuivies, on n'a point fait d'erreur. Pour entendre les démonſtrations des Théorêmes, qu'on va propoſer, il n'y a qu'à faire les multiplications qu'il

faut faire, & ensuite ouvrir les yeux pour voir ce que les produits de ces multiplications contiennent.

Pour composer les Puissances, c'est-à-dire pour élever une Grandeur à quelque Puissance qu'on veuille, il n'est question que de la multiplier selon qu'elle le doit être par sa définition. Par exemple, pour élever $b+d$ *au second degré, il faut multiplier* $b+d$ *par* $b+d$. *Selon la regle, le produit de cette multiplication sera* $b^2+2bd+d^2$, *quarré de* $b+d$. *Ainsi pour avoir le cube de* $b+d$, *il faut multiplier le quarré de* $b+d$, *qui est* $b^2+2bd+d^2$ *par* $b+d$; *le produit* $b^3+3b^2d+3bd^2+d^3$. *sera le cube de* $b+d$.

Soit donnée cette grandeur $b-d$, *pour avoir son cube; je multiplie* $b-d$ *par lui-meme, pour avoir son quarré, qui est* $b^2-2bd+d^2$, *que je multiplie par la meme Grandeur* $b-d$. *Je ferai l'opération au long afin de m'exercer. Je multiplie donc*, 1°. b^2, *ou* bb *par* b, *ce qui me donne* bbb, *ou* b^3. 2°. *Je multiplie* $-2bd$ *par* b. *Or comme il faut suppléer le signe* $+$ *devant une grandeur qui n'a aucun signe exprimé, c'est comme si je multipliois* $-2bd$ *par* $+b$; *partant puisque* $-$ *en* $+$ *donne* $-$, *le produit est* $-2b^2d$. 3°. *Je multiplie* $+d^2$ *par* b; *le produit est* d^2b.

Ensuite je multiplie le même quarré $b^2-2bd+d^2$ *par* $-d$. 1°. b^2 *ou* $+bb$ *par* $-d$; *ainsi comme* $-$ *en* $+$ *donne* $-$, *le produit est* $-bbd$. 2°. $-2bd$ *par* $-d$; *& puisque* $-$ *en* $-$ *donne* $+$, *ce produit sera* $+2bdd$. 3°. *Je multiplie* $+dd$ *par* $-d$; *&* $-$ *en* $+$ *donnant* $-$, *ce produit est* $-d^3$. *Ainsi le cube de* $b-d$ *est* $b^3-3b^2d+3bd^2-d^3$. *Il n'est point nécessaire que je parle de la Composition des autres Puissances, il n'y a qu'à les multiplier selon leurs définitions.*

CHAPITRE II.

Propositions touchant la Composition des Puissances.

PREMIERE PROPOSITION.

Les parties b & d *de la grandeur* x, *ayant été multipliées par* z, *elles font un plan ou produit égal à celui de la grandeur entiere* x, *multipliée par le même multiplicateur* z ; *ou le plan fait de la grandeur entiere* x *par* z, *est égal au plan fait des parties* b & d *par* z. 24.

Il faut démontrer que $zb+zd=xz$. Les parties $b+d$ sont égales à la grandeur entiere x : Donc, *par le quatriéme Axiome ci-dessus*, les produits $zb+zd$ & xz étant faits de grandeurs égales, doivent être égaux.

SECONDE PROPOSITION.

Le plan ou le produit de deux grandeurs entieres x & z, *multipliées l'une par l'autre, est égal au plan ou produit fait de* b+d, *parties de* x, *multipliées par* f+g, *parties de* z. 25.

C'est-à-dire que $xz=fb+fd+gb+gd$: On suppose que $d+b=x$, & $f+g=z$: Donc, *par le quatriéme Axiome ci-dessus*, le produit de $b+d$ par $f+g$, doit être égal à celui de x par z.

TROISIÉME PROPOSITION.

La grandeur z *ayant été divisée en ses parties* b & d, *le quarré de la toute* z *est égal aux deux* 26.

plans faits de la toute z, *multipliée par chacune de ses parties* b & d.

Le quarré de la toute z est zz, les plans de z par b & par d sont $zb+zd$. Or *par le premier Axiome*, la toute z, & ses parties $b+d$, ayant été multipliées par le multiplicateur commun z, doivent faire des produits égaux. Donc $zz=zb+zd$; ce qu'il falloit démontrer.

Quatriéme Proposition.

27. *Deux plans égaux ajoutés en une somme sont égaux à un plan fait du double de l'une de leurs racines multipliée par l'autre.*

Soient ces deux plans égaux by & by; la grandeur m est le double de b; ainsi $b+b$ sont les parties de m: Donc, *par le premier Axiome*, le plan my est égal au plan $by+by$, ce qu'il falloit démontrer.

Cinquieme Proposition.

28. *La grandeur* z *multipliée par* b, *l'une de ses parties est égale au produit de ses parties* b & d *par la même partie* b: *ou le produit de* z *par* b *est égal au quarré de* b, *plus le plan de* b *par l'autre partie* d.

Il faut démontrer que $zb=bb+bd$. Les parties de la grandeur z, sont $b+d$: Donc, *par le premier Axiome*, en multipliant z & $b+d$ par le même multiplicateur b, les produits seront égaux: $zb=bb+bd$, qui est ce qu'il falloit prouver: car, comme vous le voyez, le plan zb est égal au quarré de b, qui est bb, plus le plan de b, multiplié par l'autre partie d.

Sixiéme Proposition.

Le quarré de la grandeur z est égal aux quarrés de chacune des parties de z, plus 2 fois le plan de ces parties. 29.

Les parties de z sont $b + d$ En multipliant ces deux grandeurs z & $b + d$ par des multiplicateurs égaux, les produits seront égaux, *par le quatriéme Axiome.* Ainsi puisque z est égal à $b + d$, le produit de z par z, qui est zz, sera égal au produit de $b + d$ par $b + d$, qui est $bb + 2bd + dd$; ainsi $zz = bb + 2bd + dd$. Or vous voyez que bb $2bd + dd$ contient les quarrés de b & de d parties de z, & deux fois le plan bd fait de ces deux parties b & d.

Je retranche de cette édition plusieurs Théorêmes qui sont du second Livre d'Euclides, que j'avois démontrés dans l'édition précédente. On les trouvera dans mes Elémens de Géometrie dans leur place. Ici ils sont inutiles. Ceux qui ont fait attention à ce qu'ils viennent de lire, ont un chemin ouvert pour trouver une infinité de nouveaux Théorèmes. Car, par exemple, si $z = 3b$, *le quarré de z étant égal au quarré de* $3b$; $zz = 9bb$, *on peut proposer ce Théoreme.* Le quarré de la grandeur entiere est égal à neuf fois le quarré de la troisiéme partie. *La demonstration est évidente. On pourroit faire une infinité de nouveaux Théorèmes semblables; ce qui fait voir la fécondité de cette méthode.*

Probleme premier.

Connoissant un nombre plan avec l'une de ses racines, connoître son autre racine. 30.

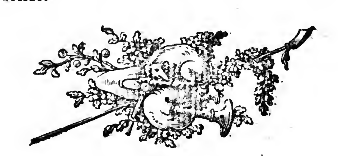
Je propose ce Probleme sur des nombres : car ce n'est pas une question dans le calcul par lettres : on voit d'abord que les racines de *b.d* sont *b* & *d*.

Soit proposé ce nombre plan 48, avec l'une de ses racines 24 ; pour trouver la seconde racine, c'est-à-dire, pour trouver un nombre qui multipliant 24, fasse 48, & qui soit aussi la seconde racine du nombre plan 48 ; pour trouver, dis-je, cette racine, je divise 48 par 24, & le quotient 2 de cette division sera la racine que je cherche, puisque ce quotient 2 multipliant 24, doit faire 48. Liv. 1. n. 21.

Probleme Second.

31. *Connoissant un nombre solide avec deux de ses racines, ou le plan de ses deux racines, connoître la troisiéme racine.*

Le solide donné est 36, les deux premieres racines sont 3 & 4, dont le plan ou produit est 12 : pour connoitre l'autre racine, il faut diviser 36 par 12 ; le quotient de cette division, qui est 3, sera la racine que l'on cherche ; car cette racine doit être un nombre qui multipliant 12, fasse 36. Or Liv. I. n. 21. ce quotient multipliant 12, doit produire 36 : il est donc la troisiéme racine de ce solide.



SECTION TROISIEME.

DE LA RESOLUTION DES PUISSANCES OU DE L'EXTRACTION DE LEURS RACINES.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'est que résolution d'une Puissance, ou Extraction de sa Racine. Ce que c'est que Racine.

RESOUDRE une Puissance, c'est trouver la Grandeur qui l'a composée en se multipliant. 323 L'on ne considere ici que les Puissances qui sont faites par la multiplication d'une certaine grandeur qui est multipliée tant de fois, selon le dégré de la Puissance où on veut l'élever. La Grandeur qui produit cette Puissance, en est la racine. C'est dans l'extraction de ces racines que consiste la résolution des Puissances. Elles sont dites quarrées, cubiques, &c. selon qu'elles sont racines de quarrés, de cubes. Ainsi extraire la racine quarrée de *bb*, c'est trouver une grandeur, qui, multipliée par elle-même, fasse le quarré *bb*. Extraire la racine cube ou cubique de *bbb*, c'est trouver une Grandeur, qui, multipliée cubiquement, fasse le cube *bbb*.

Il eſt évident que quand les Grandeurs ſont petites, ou qu'elles s'expriment avec peu de lettres, comme *bb*, *bbb*, on voit tout d'un coup que la racine quarrée de *bb*, eſt *b* : que la racine cube de *bbb* eſt *b*. Il en eſt de méme des nombres quarrés & cubes; on voit tout d'un coup quelles ſont leurs racines, quand ils ſont petits. Il eſt facile de voir que la racine quarrée de 4 eſt 2, que celle de 9 eſt 3 ; car on apperçoit que 2 multiplié par 2 fait 4, & que 3 multiplié par 3 fait 9. Il en eſt de même des nombres cubes. 8 eſt un nombre cube, dont la racine eſt 2. On apperçoit aiſément que ce nombre multiplié deux fois par lui-même fait 8.

Par conſéquent il ne feroit pas néceſſaire de chercher les regles pour l'extraction des racines, ſi tous les nombres étoient petits. Quand les nombres ſont grands, comme eſt celui-ci, 293764, on ne voit pas tout d'un coup quelle eſt ſa racine quarrée, c'eſt-à-dire, quel peut-être le nombre, qui multiplié par lui-même, produiſe 293764. Or on le peut connoître en le cherchant par parties, comme on le va voir. L'artifice dont on ſe ſert pour l'extraction des racines quarrées, cubiques, & de quelque puiſſance que ce ſoit, eſt très-ingénieux. Je l'expliquerai avec ſoin. Ce qu'on va voir ſera un parfait modele de la maniere de bien ménager la capacité de ſon eſprit, faiſant en ſorte qu'il ne ſoit point obligé de voir trop de choſes à la fois, les partageant afin qu'il les conſidere par parties.

Pour ce qui eſt des Grandeurs de pluſieurs dimenſions, qui ne ſont pas des quarrés, des cubes, &c. il n'eſt pas poſſible d'en extraire les racines, quand leur valeur eſt exprimée par nombres, à moins que de connoître une de leurs racines

quarrés les plus simples, comme sont les quarrés de chaque caractere. Par exemple, que le quarré de 5, est 25, & que la racine de ce nombre quarré 25 est 5. Vous voyez devant vos yeux ces racines & ces quarrés. Sous chaque caractere simple est son quarré. Sous 6 est 36, dont 6 est la racine.

Racines,	1	2	3	4	5
Quarrés,	1	4	9	16	25
Racines,	6	7	8	9	10
Quarrés,	36	49	64	81	100

Premier Theoreme.

Tout nombre quarré comme celui-ci 283764, *fait de* 542 *multiplié par* 542, *contient* 1°. *les quarrés de chacune de ses parties* 5, 4, 2. 33

2°. *Deux fois le plan de* 5 *multiplié par* 4, *ou ce qui est la même chose, un plan fait du double de* 5, *qui est* 10, *multiplié par* 4.

3°. *Deux fois le plan de* 54 *par* 2, *ou un plan fait de* 108, *double de* 54, *par* 2.

Cela s'apperçoit clairement en multipliant 542, racine du nombre proposé par 542. On le voit d'une maniere générale, en se servant de lettres; Car le produit de $b+d$ par $b+d$ est $bb+2bd+dd$. Vous voyez dans ce produit les deux quarrés de b & de d, & deux fois un plan fait de b multiplié par d.

Quand je vois *bd*, d'abord je connois que c'est un plan fait de *b* multiplié par *d*. Quand je vois *bbd*, je connois que c'est un solide fait du quarré *bb* multiplié par *d*; mais il n'en est pas de même des nombres. On considere ce nombre 24 comme un nombre plan; & l'on propose d'en extraire les racines. Il est évident que comme il s'agit de trouver deux nombres, qui multipliés l'un par l'autre, fassent 24, cette question se peut résoudre en différentes manieres; c'est-à dire qu'on peut assigner à 24, considéré comme un nombre plan, plusieurs racines; car il peut être fait de 2 par 12, de 3 par 8, de 4 par 6. On peut même considérer 24 comme un nombre solide, c'est-à-dire fait d'un nombre plan multiplié par un autre nombre: car 2 & 12, 3 & 8, 4 & 6 pouvant être les racines de 24, on peut concevoir que 12 est un plan dont les racines sont, ou 3 & 4, ou 2 & 6. De même 8 sera un plan, si on considere qu'il est fait de 2 & de 4; comme pareillement que 6 est un plan, dont les racines sont 2 & 3. Par conséquent pour connoître les racines dont on conçoit déterminément qu'un plan, qu'un solide, est fait, il en faut connoître une des racines, laquelle étant connue, on connoîtra facilement la seconde, comme on l'a vû ci-dessus. Lorsqu'une puissance n'est pas parfaite, c'est-à-dire qu'elle n'a point de racine qu'on puisse exprimer, ou que si elle en a, on ne la connoît point, on met devant ce signe $\sqrt{}$, qu'on appelle le Signe Radical. On y ajoute un petit chiffre qui marque de quelle puissance la grandeur qui a ce signe est la racine; si c'est d'un quarré, d'un cube, &c.

Ainsi $\sqrt[2]{bc}$ marque la racine d'une seconde puissance: $\sqrt[3]{bcd}$, la racine de la troisieme puis-

sance ou d'un cube; $\sqrt[4]{}$, celle d'une quatriéme puissance. Quand il n'y a point de chiffre dans le signe radical, il y faut sous-entendre ce chiffre 2; c'est-à-dire, que c'est une marque que la grandeur qui est après le signe $\sqrt{}$, est une seconde puissance, ou un quarré. Mais ce n'est que dans le sixiéme Livre que nous parlerons de ces puissances imparfaites.

CHAPITRE II.

De l'extraction des Racines quarrées.

UNE grandeur n'est proprement dite quarrée, que lorsqu'elle est produite par une grandeur multipliée par elle-même. 9 est un nombre quarré, parce qu'il peut être fait par 3 multiplié par lui-même. 10 n'est pas un nombre quarré: car on ne trouve point de nombre qui multiplié par lui-même fasse 10. On dit de même d'une grandeur exprimée par lettres, que c'est un quarré, lorsqu'il est fait par les mêmes lettres multipliées l'une par l'autre. *bd* n'est pas un quarré, car on voit bien que *bd* n'est pas fait par une même lettre multipliée par elle-même, comme est *bb*, *dd*. Quand le nombre des lettres est ainsi petit, on apperçoit aisément la racine de la puissance exprimée par des lettres. Il en est de même des puissances qui sont exprimées avec des chiffres; on voit d'abord que la racine quarrée de 4 est 2, que celle de 9 est 3. Or pour extraire les racines des grandes sommes, il faut connoître ces racines simples: c'est-à-dire, celles des nombres, 34.

Si on marque les trois chiffres de 542, par ces trois lettres $b+c+d$, & qu'on en prenne le quarré, les multipliant par elles-mémes, on verra à l'œil ce qu'il faut prouver. Faisons l'opération entiere. Je multiplie 1°. $b+c+d$ par b, le produit est $bb+bc+bd$. 2°. $b+c+d$ par c, le produit est $bc+cc+cd$. 3°. $b+c+d$ par d, le produit est $bd+cd+dd$. Ce qui fait $bb+2bc+cc+2bd+2cd+dd$. Vous voyez que ce produit contient 1°. les trois quarrés des trois lettres b, c, d. 2°. Deux fois le plan de b par c. 3°. Les plans $2cd$ & $2bd$ qui sont égaux § n. 27. au double du plan fait de $b+c$ multiplié par d, c'est-à-dire, de 54 par 2. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SECOND THEOREME.

35. *Ayant partagé un nombre quarré, tel que* 293764 *de deux en deux caracteres.*

29	37	64
C	B	A

1°. *Le quarré du premier caractere de sa racine, s'il peut être exprimé par un seul chiffre, est dans la premiere place de la premiere tranche* A, *commençant de droite à gauche.*

2°. *Le quarré du second chiffre est dans la premiere place de la seconde tranche* B, *s'il peut être exprimé par un seul chiffre.*

3°. *Le quarré du troisiéme chiffre de la racine, est dans la premiere place de la troisiéme tranche* C; *ainsi de suite.*

Pour connoître la vérité de cette proposition, il n'y a qu'à produire un nombre quarré comme est celui-ci 293764, en multipliant 542 par 542;

car vous verrez que les quarrés de 5, de 4 & de 2, sont placés là où on les a marqués. Faites l'opération en suivant les régles, le quarré de 2, qui est 4, se trouvera dans la premiere place de la premiere tranche. Le quarré de 4 ne sera qu'en partie dans la premiere place de la seconde tranche ; car son quarré est 16, qui demande deux chiffres. Le quarré de 5 est 25, qui, par la même raison, ne pourra pas être marqué tout entier sous la premiere place de la troisiéme tranche.

COROLLAIRE.

Un nombre quarré ayant été tranché, le nombre des tranches est égal à celui des chiffres de la racine de ce quarré. 36.

Car le quarré du troisiéme chiffre est nécessairement dans la troisiéme tranche, par le Théorême précédent. Or ce quarré, pour grand qu'il soit, peut être contenu dans cette tranche ; car 9 est le plus grand des chiffres, dont le quarré 81 s'exprime par deux seuls chiffres. Quand le quarré du dernier chiffre est petit, la derniere tranche n'a qu'un chiffre.

TROISIÉME THEOREME.

Un nombre quarré tel que 293764, ayant été partagé par tranches, comme on vient de dire, 37.
1°. le plan fait du double de 5 multiplié par 4, est entre la premiere place de la tranche C, *& la premiere place de la tranche* B. *2°. Le plan fait du double de 54 multiplié par 2, est entre la premiere place de la tranche* B, *& la premiere place de la tranche* A.

Par la premiere proposition le nombre quarré

proposé contient ces deux plans ; & si on fait attention à l'opération par laquelle on produit le nombre quarré, on verra que la valeur de ces plans est placée où la proposition présente l'assigne.

QUATRIEME THEOREME.

38. *S'il y avoit quatre caracteres dans la racine, entre le premier quarré & le second quarré, commençant de droite à gauche, il y auroit un plan fait du double des trois racines des trois quarrés suivans, multipliés par la racine du premier quarré.*

Ce qu'on vient de dire fait appercevoir la vérité de cette proposition, & en même tems de toutes les autres qu'on peut faire, quand la racine d'un nombre quarré a cinq, six, sept chiffres.

PROBLEME PREMIER.

39. *Trouver la racine quarrée d'une grandeur exprimée par lettres.*

Si cette grandeur est incomplexe, comme dd, on voit d'abord que d est sa racine.

Mais si cette grandeur est complexe, comme $bb+2bd+dd$, qu'on propose pour en extraire la racine quarrée, suivant ce qu'on vient de remarquer n. 34. 1°. Je prends la racine quarrée de bb, qui est b, je multiplie b par b, ce qui fait bb, que j'ôte de bb, & il ne reste rien. 2°. Je divise le plan $2bb$ par $2b$, qui est le double de la racine b, qu'on vient de trouver. Le quotient de cette division est d, qui est la racine du quarré dd. Ainsi je connois que la racine quarrée de $bb+2bd+dd$ est $b+d$.

Soit cette autre grandeur complexe $bb-2bd+dd$, je fais la même chose. Je prends la racine

de bb, qui est b, par le double de laquelle je divise le plan de $-2bd$, le quotient est $-d$ qui est la seconde racine ; ainsi on trouve que la racine qu'on cherche est $b-d$.

Remarquez bien que $aa+ab-ab-bb$, *ou* $aa-bb$ *n'est pas une grandeur quarrée ; car elle est faite de deux grandeurs inégales, de* $a+b$, *multiplié par* $a-b$. *Ainsi on n'en peut tirer la racine qu'en mettant devant elle le signe radical* $\sqrt{aa-bb}$.

PROBLEME SECOND.

Trouver la racine d'un nombre quarré donné. 40.

1°. *Un nombre quarré étant proposé pour en extraire la racine ; il faut le couper par tranches de deux en deux caracteres, commençant de la droite à la gauche.*

Cette premiere opération vous fera déja connoître combien la racine du nombre proposé a de caracteres par le Corollaire du second Théorême. S'il y a trois tranches, il y a trois caracteres dans la racine cherchée.

Soit donc ce nombre quarré 293764, pour en trouver la racine. 1°. Je le partage de deux caracteres en deux caracteres par tranches, ainsi ;

29 | 37 | 64

2°. *Il faut extraire la racine quarrée du nombre qui est contenu dans la derniere tranche, si ce nombre est quarré : & s'il ne l'est pas, du plus grand quarré qui y est contenu.*

Cette racine sera le dernier chiffre de la racine cherchée ; puisque son quarré est contenu dans cette tranche, par le second Théorême ci-dessus. J'extrais donc la racine quarrée de la derniere

tranche 29. Ce nombre n'étant pas quarré, je prends la racine du nombre quarré qui approche le plus de 29, sçavoir 25, dont 5 est la racine. Ce caractere 5 est le dernier caractere de la racine cherchée, que je marque dans un demi cercle, comme le quotient d'une division, ainsi que vous le voyez.

29 | 37 | 64 (5

3°. *Il faut retrancher le quarré du caractere trouvé de la premiere tranche, où il est contenu; ce qui est une des preuves de l'opération.*

J'ôte ainsi le quarré de 5, qui est 25 de 29, & il reste 4.

4°. *Il faut doubler le caractere trouvé de la racine cherchée; & après avoir placé ce double, de sorte que le premier caractere soit placé sous le dernier chiffre de la tranche précédente, il faut diviser le nombre de dessus par ce double; le quotient de cette division sera le chiffre pénultiéme de la racine que l'on cherche.*

Je prends donc le double du caractere trouvé 5: ce double est 10, que je place sous 43, de sorte que le zéro est sous le dernier caractere de la tranche précédente. Je divise 43 par 10; le quotient est 4, que je marque après 5 dans le demi cercle. Je pose aussi le même chiffre 4 sous la premiere place de la même tranche, après 10.

4 ~~29~~ 1	37 04	64 (54

Je suis assuré que 4 est véritablement le second chiffre de la racine que je cherche; car par le troisiéme Théorême, § n. 37. entre le quarré du chiffre

chiffre qu'on vient de trouver, & le quarré de l'autre chiffre qu'on cherche, est un plan qui a pour une de ses racines le double du dernier caractere ; par exemple, dans cette question, le double de 5 qui est 10, & pour l'autre racine, celle du quarré qui est contenu dans la tranche précédente. Or par le Problême 3 n. 30. en divisant le plan dont nous parlons par l'une de ses racines connues, sçavoir 10 qui est le double de 5, le quotient de la division qui est 4, montre que la seconde racine de ce plan est 4, qui est aussi par conséquent le second caractere de la racine quarrée du nombre proposé.

5°. *Il faut retrancher ce plan dont on vient de parler, des nombres où il est contenu.*

6°. *Il faut de plus ôter le quarré du caractere de la racine que l'on a trouvée.*

Prenez garde d'ôter ce quarré des nombres où il est contenu. S'il n'est exprimé que par un chiffre, selon le second Théorême ci-dessus, il est contenu dans le premier chiffre de cette seconde tranche ; & s'il est exprimé par deux chiffres, il sera contenu dans les deux chiffres de cette tranche, au moins en partie.

Dans le même exemple j'ôte des nombres de dessus, le plan de 10, multiplié par 4, que nous venons de trouver, & le quarré de 4 ; disant, 4 fois 10 font 40 ; de 43 ôtez 40, reste 3. Ensuite disant 4 fois 4 font 16 ; de 37 ôtez 16, reste 21.

4	2 1		
2 9	3 7	64	(54
1	0 4		

7°. *S'il y a plus de deux tranches, il faut doubler les caracteres trouvés de la racine cherchée ;*

& après avoir placé le double sous le reste du nombre proposé, de sorte que le dernier caractere se trouve sous la derniere place de la tranche dont on veut extraire la racine, il faut diviser les nombres de dessus par ce double, le quotient sera le caractere qu'on cherche.

Puisqu'il y a donc plus de deux tranches dans le nombre proposé, je double les caracteres trouvés 54 de la racine cherchée. Je place le double de 54 qui est 108, comme il a été enseigné, sçavoir 8 sous la derniere place de la premiere tranche. Je divise 216 par 108, le quotient est 2, que je place après 54, & sous la premiere place de la derniere tranche.

2 1 | 6 4 | (542
1 0 | 8 2 |

8°. *Il faut retrancher ce plan dont on vient de parler des nombres de dessus; outre cela le quarré du caractere de la racine, lequel caractere on vient de connoître.*

S'il n'y a plus d'autres tranches, & qu'il ne reste aucun nombre, c'est une marque que le nombre proposé étoit quarré. S'il reste quelque chose, il n'étoit pas quarré.

Je multiplie 1082 par 2, & j'ôte le produit des nombres sous lesquels 1082 sont écrits, disant: 2 fois 10 font 20; de 21 ôtez 20, il reste 1. Ensuite je dis 2 fois 8 font 16; de 16 ôtez 16, il ne reste rien: 2 fois 2 font 4; de 4 ôtez 4, il ne reste rien; ainsi le nombre proposé 293764 est un nombre quarré, dont 542 est la racine.

Voici la même extraction dans laquelle se fait la soustraction, selon la maniere que nous avons proposée, Livre I. n. 13.

4	2 1	0 0	
29	37	64	(542
1	04	82	
	10		

Soit le même nombre 293764. Je dis : La racine de 29 eſt 5 ; 5 fois 5 font 25, qui ôtés de 29 reſte 4, que j'écris deſſus.

Je double 5, ce qui fait 10, que j'écris ſous le nombre propoſé, ainſi que vous le voyez. Je dis : en 43 combien de fois 10 ? Il y eſt 4 fois ; ce que j'écris au quotient, & ſous 7 ; puis je multiplie 104 par 4, diſant : 4 fois 4 font 16 ; de 17 j'ôte 16, reſte 1, que j'écris deſſus, & retiens 1 par mémoire.

Puis 4 fois 0 eſt 0, avec 1 de retenu fait 1, que j'ôte de 3, reſte 2, que j'écris deſſus 3.

Puis 4 fois 1 fait 4, qui ôtés de 4 reſte 0.

Enſuite je double 54, ce qui fait 108, que j'écris pour diviſeur, & je trouve que ce double eſt contenu deux fois dans 216. J'écris 2 au quotient, & ſous 4 ; puis je dis 2 fois 2 font 4, ôtés de 4, il ne reſte rien : 2 fois 8 font 16, de 16 ne reſte rien, & retiens 1 par mémoire. Puis 2 fois 0 eſt 0, avec 1 de retenu fait 1, que je ſouſtrais, il ne reſte rien ; puis 2 fois 1 fait 2, que je ſouſtrais ; ainſi il ne reſte rien.

La preuve de cette opération ſe fait en multipliant la racine trouvée 542 par elle-même : ſi ſon produit eſt 293764, l'opération a été bien faite.

AUTRE EXEMPLE.

Ce nombre 71824 eſt donné pour en extraire la racine quarrée.

1°. Après l'avoir partagé par tranches, j'extrais la racine du nombre quarré qui approche le plus de 7. Ce nombre quarré est 4, dont la racine est 2, que je marque: après j'ôte de 7 le quarré de 2, qui est 4, & il reste 3.

3
7 | 18 | 24 | (2

2°. Je double le caractere trouvé 2. Je place ce double qui est 4, sous 1, par lequel je divise 31, le quotient est 7; mais parce que ce quotient est trop grand, comme il est facile de l'expérimenter, je ne prends pour quotient que 6, que je place après 2, & sous la premiere place de la seconde tranche, c'est-à-dire sous 8. Je multiplie 46 par 6, & j'en ôte le produit de 318, disant: 6 fois 4 font 24, que je retranche de 31, reste 7: 6 fois 6 font 36, que je retranche de 78, reste 42.

4
7 2
5 | 18 | 24 | (26
46

3°. Il ne reste plus du nombre proposé, que 4224 que j'écris & que je tranche, comme vous le voyez. Je double les caracteres 26 de la racine cherchée. Ce double est 52, que je place comme il a été enseigné, en écrivant 2 sous la derniere place de la premiere tranche, & je divise par ce nombre les nombres qui sont dessus. Le quotient de cette division est 8, que je mets après les deux caracteres déja trouvés de la racine que je cherche, & en même tems sous la premiere place de la premiere tranche.

2	6	(268
42	24	
8	28	

Je multiplie 528 par 8, je retranche le produit de cette multiplication des nombres de dessus, qui font 4224; ce que je fais, en disant: 8 fois 5 font 40; de 42 ôtez 40, reste 2: 8 fois 2, font 16; de 22 ôtez 16, reste 6: 8 fois 8 font 64, il ne reste rien. Ainsi ayant observé les Regles, je suis assuré que 71824 est un nombre quarré, dont 268 est la racine.

Autre Exemple.

On propose d'extraire la racine quarrée de ce nombre 92428. 1°. Après l'avoir tranché, j'extrais la racine de la derniere tranche où est 9, qui est un nombre quarré; cette racine est 3, que je marque à part; je prends le quarré de cette racine, que j'ôte de 9, & il ne reste rien.

9 | 24 | 28 | (3

2°. Je double ce caractere trouvé 3; je pose le double qui est 6 sous le dernier caractere de la seconde tranche, qui est 24; je ne puis pas diviser 2 par 6; ainsi le second caractere de la racine cherchée est un zéro. Je marque donc un zéro après 3, & aussi sous le premier caractere de la seconde tranche. Je multiplie 60 par zéro, & cela ne fait rien; je ne puis donc rien ôter des nombres sous lesquels 60 sont placés.

9	24	28	(30
	60		

3°. Je double 30 qui est au quotient: ce double

eſt 60 que je place de ſorte que le caractere zéro ſoit ſous la derniere place de la premiere tranche , ſçavoir ſous 2.

Je diviſe les nombres de deſſus par 60, le quotient eſt 4 ; que je marque après 30 au quotient, & auſſi ſous le premier caractere de la premiere tranche.

9	24	28	(304
	60	04	
	6		

Je multiplie 60 par 4 , diſant : 4 fois 6 font 24 ; que je retranche du nombre de deſſus 24 , & il ne reſte rien : 4 fois zéro font zéro ; 4 fois 4 font 16 , de 28 ôtant 16 , il reſte 12.

		12	
9	24	28	(304
	60	04	

Ainſi le nombre propoſé 92428 n'eſt pas un nombre quarré , celui qui en approche le plus eſt 92416 , dont la racine eſt 304.

Nous ferons voir dans la ſuite que lorſqu'un nombre n'eſt pas quarré , il eſt impoſſible de trouver une grandeur qui , multipliée par elle-même , produiſe ce nombre : par exemple, 18 *n'étant pas un nombre quarré , aucune grandeur multipliée par elle-même ne produira* 18.

CHAPITRE III.

De l'Extraction des Racines cubes.

L'Extraction de la racine cube d'un nombre qui est grand, ne se fait que par parties, comme l'extraction de la racine quarrée. On coupe le nombre cube proposé par tranches, & l'on ne tire la racine que d'une de ses parties qui soit un cube, dont la racine se puisse exprimer avec un seul chiffre. Ainsi il faut premierement sçavoir les cubes des premiers chiffres : ce qui est absolument nécessaire. Vous voyez ces cubes dans cette Table. 41.

Racines.	1	2	3	4	5
Cubes.	1	8	27	64	125

Racines.	6	7	8	9	10
Cubes.	216	343	512	729	1000

LEMME.

La grandeur b+c *étant multipliée cubiquement, son cube* bbb+2bbc+ccb+bbc+2ccb+ccc. *ou* bbb+3bbc+3ccb+ccc *contient les cubes des parties* b & c, & *deux solides, dont le premier qui est* 3bbc, *est fait du triple du quarré de la au-*

niere racine b *multipliée par la premiere racine* c, *& le second* 3ccb *est fait du triple du quarré de* c *multiplié par* b.

Cela saute aux yeux. Si la Grandeur donnée étoit $b - c$, il y auroit les mêmes parties, mais avec des signes en parties contraires, comme il est évident. Le cube de $b - c$ est $b^3 - 3bbc + 3ccb - c^3$.

Si la grandeur donnée avoit eu trois lettres, par exemple, qu'elle eût été $b + c + d$, le cube de la toute contiendroit les cubes particuliers de ces trois lettres, sçavoir bbb, ccc, ddd : outre cela, quatre solides; dont le premier seroit $3bbc$, le second $3bcc$, le troisiéme fait du triple du quarré de $b + c$, multiplié par d; ainsi, si $b + c = x$, ce troisiéme solide seroit $3xxd$. Le quatriéme solide est fait du triple de $b + c$, ou de x qui est égal à $b + c$, & du quarré de d; ainsi ce quatriéme solide seroit $3xdd$.

Cinquiéme Theoreme.

42. *Un nombre cube tel que celui-ci* 160103007, *fait de cette racine* 543 *multipliée cubiquement, contient*, 1°. *les trois cubes de chacun des caracteres de sa racine* 543. 2°. *Quatre solides, dont le premier est fait du triple du quarré de* 5 *multiplié par* 4; *& le second est fait du triple de* 5 *multiplié par le quarré de* 4; *le troisieme est fait du triple du quarré de* 54 *multiplié par* 3 : *& le quatriéme du triple de* 54 *multiplié par le quarré de* 3.

Par ces trois lettres $b + c + d$ du Lemme précédent, nous avons pu marquer ce nombre 543, qui étant multiplié cubiquement fait 160103007, par conséquent ce nombre cube 160103007, est

égal au cube de $b+c+d$ qui contient les parties exprimées dans la proposition.

Sixiéme Theoreme.

Ayant partagé ce nombre cube 160103007, *par des tranches ou des lignes, commençant de droite à gauche, de trois caracteres en trois caracteres, comme vous le voyez.* 43.

160	103	007
C	B	A

1°. *Le cube de* 5 *est dans la premiere place de la tranche* C, *& dans les places suivantes ; parce que ce cube ne peut être exprimé que par trois chiffres.* 2°. *Le cube de* 4 *est dans la premiere place de la tranche* B, *& dans le chiffre suivant. Et* 3°. *Le cube de* 3 *est dans la premiere place de la tranche* A *en partie ; parce que ce cube ne peut être exprimé qu'avec deux chiffres.*

Cette proposition se prouve par l'opération, qui, en multipliant cubiquement la racine 543, a produit le nombre cube. Pour être plus clair, & en même tems plus court, j'applique à un nombre cube particulier ce qui convient à tous. Ce qu'on a dit de l'extraction des racines quarrées sert à comprendre ce qu'on voit ici : ce qui fait que je m'étends moins.

Corollaire.

Un nombre cube ayant donc été coupé par tranches, il y a autant de caracteres dans sa racine, c d e que de tranches. 44.

Car, 1°. s'il a trois chiffres dans la racine, le

cube du dernier, après lequel on n'ajoute plus rien, sera dans la premiere place & dans les suivantes de la troisiéme tranche. Ainsi comme le cube du plus grand chiffre, qui est 9, peut être exprimé par trois chiffres, sçavoir 729, si la racine du nombre proposé n'a que trois chiffres, il ne peut pas y avoir plus de trois tranches. Quand la derniere tranche n'a pas trois chiffres comme les autres, c'est une marque que le cube du dernier chiffre a pour racine 4, ou quelqu'autre moindre nombre.

SEPTIEME THEOREME.

45. *Les deux premiers solides, l'un fait du triple du quarré de 5, multiplié par 4; l'autre fait du triple de 5 multiplié par le quarré de 4, sont entre* C *&* B *: les deux autres, dont l'un est fait du triple du quarré de 54 multiplié par 3; & l'autre fait du triple de 54, multiplié par le quarré de 3, sont entre* B *&* A.

Cette proposition est évidente à quiconque multiplie cubiquement 543, & qui fait attention aux multiplications partiales qu'il fait.

HUITIEME THEOREME.

46. *S'il y avoit quatre chiffres dans la racine cubique, entre le premier & le second cube, il y auroit deux solides ou leur valeur. Le premier fait du triple des trois racines des trois cubes, multiplié par le quarré de la premiere racine; le second fait du triple du quarré des trois racines, multiplié par la premiere racine.*

Cette proposition se prouve comme les autres. On apperçoit assez ce qui arrive lorsqu'un nombre cube a cinq, six tranches, & davantage.

PROBLEME TROISIEME.

Trouver la racine cube 47 d'une grandeur cube exprimée par lettres. 47.

Si cette grandeur est incomplexe, il n'y a pas de difficulté ; il est manifeste que la racine cube de bbb est b.

Si cette grandeur est complexe, comme $a +$ $3aab + 3abb + b^3$, dont il faut tirer la racine cube. La racine cube de a^3 est a, j'ôte a^3 de a^3, & il ne reste rien. Entre le cube a^3 & le cube suivant, est un solide, fait du triple de aa multiplié par la racine du cube suivant, selon le Lemme précédent ; je divise donc $3aab$ par $3aa$, le quotient est b, qui est par conséquent la racine du cube suivant. Je multiplie $3aa$ par b ; ce qui fait $3aab$, que j'ôte de $3aab$, il ne reste rien. Entre le cube de a & b, il y a encore un second solide par le même Lemme, fait de $3a$ multiplié par bb. J'ôte donc ce solide de $3abb$, comme aussi le cube de b^3, & il ne reste rien ; je suis donc assuré que $a + b$ est la racine cube de $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$.

PROBLEME QUATRIEME.

Trouver la racine d'un nombre cube donné. 48.
1°. Il faut couper le nombre cube qui a été donné pour en extraire la racine, par tranches de trois caracteres en trois caracteres, commençant de la droite à la gauche.

Cette premiere opération vous fera connoître par le Corollaire ci-dessus, n. 44. le nombre des caracteres de la racine cube cherchée ; s'il y a trois tranches, la racine cherchée a trois chiffres.

Soit donc donné ce nombre cube 160103007 ;

dont il faut trouver la racine, Je le partage en trois tranches de la droite à la gauche, de trois caracteres en trois caracteres.

160 | 103 | 007

2°. *Il faut extraire la racine cubique du nombre contenu dans la derniere tranche, s'il est cube; & s'il ne l'est pas, du nombre cube qui y est contenu.*

Cette racine sera le dernier caractere de la racine cherchée, qu'il faut écrire dans un demi cercle, comme le quotient d'une division.

J'extrais donc la racine cubique de 160, qui est dans la derniere tranche; ce nombre n'est pas cube; je trouve dans la même table des cubes, qui est ci-dessus, que le cube qui approche le plus de 160 est 125, dont la racine est 5, que je marque à part, comme nous avons fait jusqu'à présent dans les divisions & dans les extractions des racines,

160 | 103 | 007 | (5

3°, *Il faut prendre le cube de ce caractere trouvé, & l'ôter du nombre proposé.*

On fait de cette maniere l'opération & sa preuve en même tems: car, pour être assuré que les parties que l'on dit être dans le nombre cube proposé y sont en effet, il faut qu'elles en puissent être retranchées. Je retranche donc le cube 125 de la derniere tranche, où il est contenu, il reste 35.

$\overset{35}{\cancel{160}}$ | 103 | 007 | (5

4°. *Il faut tripler le quarré du caractere trouvé, & écrire ce triple de sorte que le premier ca-*

ractere de la droite à la gauche, soit sous le dernier caractere de la tranche suivante.

Le quarré du caractere 5 que j'ai trouvé est 25, dont le triple est 75, que je place comme la Regle l'ordonne.

35	103	007	(5
7	5		

5°. *Il faut diviser par ce triple les nombres sous lesquels il est écrit, & multipliant ce triple par le quotient de cette division, ôter le produit des nombres de dessus.*

Entre le cube du caractere trouvé de la racine cherchée, & le précédent, est un solide fait du triple du quarré de 5 multiplié par le caractere précédent de la racine, qui est encore inconnu. Or par le Problême, 5 n. 31, le quotient de cette division, que la Regle ordonne, sera la racine de ce solide.

Je divise donc par 75 les nombres de dessus qui sont 351, le quotient de la division est 4, qui est le second caractere de la racine cherchée, que je place par conséquent après celui que j'avois trouvé. Je retranche ce solide fait du triple du quarré de 5, qui est 75, multiplié par 4, en disant: 4 fois 7 font 28, de 35 ôtant 28, il reste 7: ensuite 4 fois 5 font 20, de 71, ôtant 20, il reste 51.

5			
7			
35	103	007	(54
7	5		

Il reste donc 5103007 à diviser, que j'écris à part pour éviter la confusion, & que je tranche comme vous le voyez ci-après.

6°. *Il faut prendre le quarré de ce caractere qu'on vient de connoître ; & après l'avoir multiplié par le triple du dernier caractere trouvé par la seconde Regle, c'est-à-dire de 5, premier chiffre du quotient, en ôter le produit des nombres qui restent tant en la derniere tranche, qu'en la précédente ; il faut aussi ôter le cube de ce caractere, puisque tout cela est contenu dans ces deux tranches par les sixiéme & septiéme Théorèmes, s n. 43 & 45.*

Je prends le quarré de 4, qui est 16, que je multiplie par 15, triple de 5 ; ce qui fait 240, que j'ôte de 510, & il reste 270; ainsi j'ôte d'un même lieu deux solides, le premier fait du triple du quarré de 5 multiplié par 4, le second fait du quarré de 4 multiplié par le triple de 5 ; puisqu'ils y étoient contenus.

	6		
2	7̸39		
3	1̸0̸3̸	007	(54

Après cela il faut retrancher le cube de 4, qui est 64 ; mais prenez garde qu'il faut le retrancher du lieu où il est. Or étant exprimé par deux chiffres, il est contenu au moins en partie dans les deux premiers chiffres de la seconde tranche, sçavoir dans 03. Ayant ôté de cette maniere 64 de 2703, il reste 2 | 639 | 007.

7°. *S'il y a plus de deux tranches dans le nombre cube proposé, il faut prendre le quarré des racines trouvées, tripler ce quarré ; & après l'avoir placé de sorte que le dernier caractere soit sous la derniere place de la tranche précédente, diviser les nombres de dessus par ce diviseur, le quotient donnera le caractere cherché.*

Il y a en cet endroit un solide fait du triple du

quarré des racines trouvées, multiplié par la racine qu'il faut trouver ensuite. Or divisant ce solide par le triple du quarré des racines trouvées, le quotient de la division donnera cette racine s n. 31.

Je prends le quarré des deux racines 54, qui est 2916 que je triple ; ce triple est 8748, par lequel nombre, je divise les nombres restans du cube proposé. Le quotient de cette division est 3, que j'écris après les autres racines trouvées.

2 | 639 | 007 | (543
| 874 | 8 |

89. *Il faut multiplier par ce caractere qu'on vient de connoître le triple du quarré des caracteres déja connus, & retrancher ce produit ; outre cela prendre le quarré de ce caractere, & après l'avoir multiplié par le triple des autres caracteres connus, en ôter le produit de ce qui reste du nombre proposé. De plus, il faut ôter le cube de ce caractere ; s'il ne reste rien, c'est une marque que le nombre proposé étoit un nombre cube.*

Je multiplie le triple du quarré 54 qui est 8748, par 3 du quotient, le produit de cette multiplication est 26244, que je retranche de 26390 : il reste encore 14607.

14 | 607.

Je prends le quarré de 3 qui est 9, que je multiplie par le triple de 54, qui est 162 ; je retranche le produit de cette multiplication, qui est 1458, de 1460, & il reste encore 27.

Enfin, je prends le cube de 3. qui est 27, que je retranche du reste 27, par la même regle, après quoi il ne reste rien ; ainsi 543 est la racine

de 160103007, & ce nombre est cube.

La preuve de cette opération se fait en multipliant la racine trouvée 543 cubiquement. Si son produit est 160103007, l'opération a été bien faite.

AUTRE EXEMPLE.

Le nombre proposé est 216000, après l'avoir coupé par tranches, j'extrais la racine de la premiere tranche

216 | 000

qui contient le nombre cube 216, dont la racine est 6, comme il se voit dans la Table ci-dessus: je retranche ce cube, & il ne reste rien de cette premiere tranche.

Je prends le quarré de 6, qui est 36, je le triple; ce triple est 108, par lequel voulant diviser les chiffres précédens, je trouve que zéro est le quotient, je le pose pour le second chiffre de la racine cherchée qui n'a que deux chiffres, puisque son nombre cube n'a que deux tranches.

On voit évidemment que le nombre proposé est cube, & que sa racine est 60.

CHAPITRE IV.

De l'Extraction des Racines des autres Puissances.

49. L'Extraction des racines des autres Puissances se peut faire aussi facilement que celles des secondes & troisiémes puissances. La méthode qui vient d'être enseignée se fait assez appercevoir. On voit, par exemple, qu'ayant partagé un nom-

bre quarré de quarré par tranches, de quatre caracteres en quatre caracteres, il y aura autant de caracteres dans la racine de ce nombre, qu'il y aura de tranches; que s'il y a trois tranches, cette racine aura trois chiffres; que le quarré de quarré du dernier chiffre sera dans la derniere tranche. Comme ces extractions ne sont guéres d'usage, & que les opérations de cette méthode seroient ennuyeuses, l'on peut prendre un chemin plus court, en rappellant ces puissances aux quarrés & aux cubes. Pour concevoir comment cela se peut faire, il faut remarquer que toute grandeur qui peut être faite de deux grandeurs égales, est quarrée, & que celle qui peut être faite des trois grandeurs égales, multipliées cubiquement, est un cube; d'où il s'en suit qu'une grandeur de 4 dimensions comme $bbbb$, peut être considérée comme un quarré; car elle peut être produite de bb multiplié par bb. Une grandeur de six dimensions peut être aussi considérée comme un quarré; car bbb multiplié par bbb, fait b^6. Une grandeur de neuf dimensions peut être considérée comme un cube; car bbb multiplié cubiquement fait b^9 : d'où il suit que toute puissance qui peut être divisée par 2 ou par 3 exactement, peut être réduite à une moindre puissance, jusqu'à la premiere même, si on peut encore diviser celle à laquelle elle est réduite par 2 ou par 3, de sorte que le dernier quotient soit 1; ce qui se comprendra mieux par des exemples.

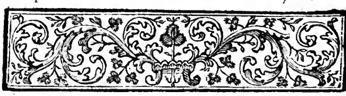
La grandeur b^{12}, qui a 12 dimensions, peut être divisée exactement par 2 & par 3, & je la puis considérer, ou comme un cube, ou comme un quarré; car $bbbb$ multiplié cubiquement fait b^{12}; ou comme un quarré; car b^6 multiplié par lui-même, fait b^{12}. Ainsi en prenant la racine

quarrée de cette grandeur, je la réduirai à une grandeur de six dimensions. En prenant sa racine cubique, je la réduirai à une grandeur de 4 dimensions. Or en prenant la racine quarrée d'une 6^e^ puissance, par exemple de b^6, on la réduit à une 3^e^, sçavoir à b^3, de laquelle ayant pris la racine cubique, on la réduit à la premiere. En prenant la racine quarrée d'une 4^e^ puissance on la réduit à une seconde, d'où ayant pris la racine quarrée, on la réduit à la premiere.

Pour tirer, selon cette méthode, la racine de la 9^e^ puissance de ce nombre 512, puisqu'une grandeur de 9 dimensions peut être divisée par 3, & être faite de la 3^e^ puissance multipliée cubiquement, je prends la racine cube de 512 qui est 8, & ensuite la racine cube de 8 qui est 2; ainsi je connois que 2 est la racine de 512, considéré comme une 9^e^ puissance.

Il est bien évident qu'on ne peut pas en cette maniere réduire à une moindre puissance la 5^e^, la 7^e^, la 11^e^, la 13^e^, la 17^e^, la 19^e^ puissance. On peut réduire la 10^e^ à la 5^e^, en prenant la racine quarrée, la 14^e^ à une 7^e^, en prenant encore sa racine quarré, la 15^e^ à une 5^e^, en prenant sa racine cubique: mais on ne peut pas les réduire à la premiere puissance. S'il étoit nécessaire de le faire, il faudroit déduire de ce que nous avons enseigné touchant l'extraction des racines quarrées & cubiques, ce que l'on doit faire pour extraire les racines de ces puissances. Si les grandeurs absolues de ces puissances, c'est-à-dire, celles dont elles sont les puissances, étoient exprimées par plusieurs chiffres, il faudroit des opérations infinies; car l'on apperçoit bien, par exemple, qu'une 5^e^ puissance doit se diviser par tranches de cinq caracteres en cinq caracteres; que la

5^e^ puissance du dernier chiffre de toute la racine, se trouveroit dans la premiere place de la derniere tranche & dans les suivantes; qu'entre la premiere place de cette tranche & la premiere place de la tranche précédente, il y auroit plusieurs grandeurs de cinq dimensions, comme il est facile de le connoître en faisant monter une grandeur telle que $b+d$ à sa cinquieme puissance, c'est-à-dire en la multipliant cinq fois par elle-même.



ELEMENS DES MATHEMATIQUES, OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GÉNÉRAL.

LIVRE TROISIEME.

Des Raisons ou Rapports que les Grandeurs ont entr'elles.

SECTION PREMIERE.

Des Raisons ou Rapports en général.

CHAPITRE PREMIER.

On donne une idée de ce que c'est que Raison, & Proportion.

1. RApport & Comparaison, c'est presque une même chose. Considérer le rapport d'une chose avec une autre, c'est voir ce que l'une est quand on la compare avec l'autre. Comme si en considérant la taille d'un

homme, en même tems je le compare avec une autre personne ; ce qui me fait concevoir qu'il est grand, ou qu'il est petit. Grand, si je le trouve d'une taille plus avantageuse que celui avec qui je le compare ; petit, si sa taille est moins avantageuse. Ainsi ce mot *Rapport*, ne signifie proprement qu'une maniere d'être d'une chose au regard d'une autre : ou, pour parler plus juste, c'est la maniere qu'on conçoit qu'une chose est, la rapportant à une autre. Nous jugeons le même homme grand ou petit, selon que nous le comparons avec telle & telle personne.

Le rapport ou la maniere d'être d'une chose s'appelle *Raison*, du nom Latin *Ratio*, dont la signification est fort étendue. Il se prend pour cette lumiere qui nous éclaire ; il signifie aussi le rapport de deux ou plusieurs choses. Souvent dans les Auteurs Latins modernes, on appelle un rapport *habitudo*, du Verbe *habere*, ce qui est pris des Grecs, qui pour dire *ce que cette chose est au regard de celle-là*, disent ὡς ἔχει, &c. ce qu'on dit en Latin, *ut ista res se habet*; *&c.* je fais cette remarque, parce qu'il est très-important d'avoir des idées bien nettes des mots qui sont d'usage dans les Sciences.

On ne compare ensemble que les choses qui sont d'une même espece ; c'est toujours, selon ce qui se rencontre en elles, de plus ou de moins, d'égal ou de semblable. On compare les qualités entr'elles, les couleurs avec les couleurs ; & on dit qu'elles sont plus ou moins claires. On compare le pere avec son fils, parce qu'il lui communique la même nature. Il y a entr'eux égalité de nature. Les rapports ou raisons, dont nous devons parler, sont ceux qui se font selon *la quantité*. Il y a différentes especes de quantité ; il faut

donc ajouter que ces rapports se font selon la même espece de quantité : car on ne dit point qu'une ligne soit plus grande ou plus petite qu'une surface, qu'un corps, qu'un espace de tems, ou qu'une quantité de mouvemens ; ou qu'elle leur soit égale. Or quand on considere deux grandeurs de même espece, c'est-à-dire deux lignes, deux surfaces, deux corps, deux espaces de tems, deux quantités de mouvement, deux poids, l'on n'y peut remarquer autre chose, comme nous venons de voir, que de l'égalité ou de l'inégalité ; de la petitesse ou de l'excès.

Les idées de ces mots, *égalité*, *inégalité*, *grand*, *petit*, enferment une comparaison, c'est-à-dire que ces mots signifient qu'on compare une grandeur. On dit qu'elle est égale ou inégale, petite ou grande, selon qu'on la rapporte à une telle ou telle grandeur. Tout ce qu'on peut donc dire des raisons ou rapports des grandeurs, se reduit à sçavoir quand est-ce qu'elles sont égales ou inégales, petites ou plus grandes. Mais cette égalité ou inégalité se peut concevoir en différentes manieres ; ce qui fait qu'on établit plusieurs especes de raisons ou de rapports.

Les raisons des grandeurs sont leurs manieres d'être, ou ce qu'elles sont au regard les unes des autres, égales ou inégales, petites ou plus grandes. Or l'égalité, l'inégalité, la petitesse & la grandeur de deux choses qu'on compare, se peuvent considérer en deux manieres. 1°. En examinant de combien l'une surpasse l'autre, l'excès de l'une & le défaut de l'autre ; en un mot, leur différence. Comme si je compare ces deux nombres 5 & 9, je regarde que 9 est plus grand que 5, que son excès par dessus 5 & 4, est que 4 est le défaut de 5 au dessous de 9, ou que 4 est la dif-

rence de ces deux nombres. Il eſt certain qu'on conſidere ainſi très-ſouvent les choſes, leſquelles on compare ſelon leur quantité. On dira de deux bâtons: Celui-ci eſt plus grand que l'autre d'un pouce, de deux pouces.

2°. L'autre maniere de comparer deux grandeurs, eſt de ne pas conſidérer ſeulement leur différence, mais ce qu'elles ſont entiérement. Dans la premiere maniere on ne conſidere quaſi que les extrémités des choſes. Pour me ſervir de l'exemple que j'ai propoſé, en joignant deux bâtons, on en conſidere les extrémités, & l'on voit que l'un eſt plus grand de quelques pouces, ou qu'il s'en faut quelques pouces que l'extrémité de l'autre n'atteigne ſon extrémité.

Dans la ſeconde maniere on conſidere comment une grandeur entiere eſt contenue dans une autre; ſi elle y eſt contenue tant de fois exactement, ou non: ce qui fait qu'on dit qu'elle en eſt le tiers, le quart, &c. Cette maniere eſt la plus conſidérable; & quand on parle de *Rapport*, c'eſt elle qu'on entend. Quand on demande d'une grandeur ce qu'elle eſt au regard d'une autre, c'eſt la maniere qu'elle y eſt contenue, ſi elle en eſt la moitié, le tiers, le quart, &c. Auſſi parmi les Mathématiciens le mot de *Raiſon*, quoiqu'il ne ſignifie que rapport ou maniere d'être, & que la premiere maniere dont nous venons de parler ſoit par conſéquent une *raiſon* auſſi-bien que la ſeconde; cependant dans l'uſage, par ce mot on n'entend que la maniere dont une grandeur contient ou eſt contenue dans une autre; & pour diſtinction on appelle *Différence* la premiere maniere.

Comme on peut comparer une choſe avec toute autre, lorſqu'il y a lieu de le faire, auſſi on peut comparer les comparaiſons mêmes qu'on fait, c'eſt-

à-dire, un rapport avec un rapport, examinant si une chose est au regard d'une seconde, ce qu'une troisiéme est au regard d'une quatriéme ; si par exemple Pierre est aussi petit au regard de Jacques, que Jean l'est au regard de François

On appelle *Proportion* l'égalité, ou la similitude des rapports. Il y a deux sortes de proportions, comme il y a deux sortes de Rapports. L'égalité des différences, s'appelle *Proportion Arithmetique.* Je ne sçai point d'autre cause pour laquelle on lui a donné ce nom, si ce n'est qu'on la considere particuliérement dans l'Arithmétique. Le rapport qu'on considere le plus dans les nombres, c'est leur différence, l'excès ou le défaut de l'un à l'égard de l'autre. On a nommé *Proportion Géométrique* l'égalité des raisons ; parce qu'effectivement on ne parle gueres dans la Géométrie que de l'égalité des raisons.

Il faut se servir des noms que l'usage a établis, mais il faut bien en marquer les véritables idées. Ce mot, *Raison*, ne signifie plus en genéral un rapport, quel qu'il soit, puisqu'il conviendroit à la différence ou à la premiere maniere de comparer deux Grandeurs. C'est une nécessité d'entendre par ce mot un certain rapport, selon lequel on considere la maniere qu'une grandeur en contient une autre, ou qu'elle en est contenue. Quand il est impossible d'exprimer par nombre cette maniere, on appelle cela une *Raison sourde.*

Comme tout rapport, soit *Différence*, soit *Raison*, demande deux termes, aussi tout rapport de différence ou de raison demande quatre termes ; c'est-à-dire, qu'en comparant des raisons ou des différences, on a quatre termes devant les yeux. Mais un même terme peut servir deux fois ; comme, en considérant que de même que 9 sur-

passe

passe 5 de 4 ; de même 13 surpasse 9 de 4 ; ce qui est une proportion Arithmétique. Ou comme quand je considere que 2 est le tiers de 6, de même que 6 est le tiers de 18 ; ce qui est une proportion Géométrique.

CHAPITRE II.

Définition & explication des termes dont on se doit servir.

PREMIERE DEFINITION.

Lorsque l'on compare deux grandeurs l'une avec l'autre. Ces deux grandeurs sont nommées : Termes de cette comparaison. Le premier terme s'appelle Antécédent, & le second Conséquent. 2

En comparant la grandeur A avec la grandeur B, on peut commencer par B aussi bien que par A : le premier terme est celui par lequel on commence, & qui s'écrit le premier. On pourroit commencer par celui qu'on a écrit le dernier ; ainsi le même terme, de Conséquent, peut devenir Antécédent. Proprement l'Antécédent c'est la chose qu'on compare, & le Conséquent celle à qui on la compare.

SECONDE DEFINITION.

L'excès d'une grandeur par dessus une autre grandeur, s'appelle Différence. 3

L'excès de 7 par-dessus 5 est 2. Ce nombre 2 est la différence de 7 & de 5.

TROISIEME DEFINITION.

4. *La maniere dont une grandeur contient ou est contenue dans celle avec laquelle on la compare, se nomme Raison.*

La maniere que 2 est contenu dans 6, & que 6 contient 2, s'appelle Raison de 2 à 6.

QUATRIEME DEFINITION.

5. *L'égalité des raisons ou des différences, s'appelle Proportion.*

CINQUIEME DEFINITION.

6. *Proportion Arithmétique, est une égalité de différence.*

La différence de 5 avec 3, est la même que celle de 10 avec 8; l'égalité de ces deux différences s'appelle Proportion Arithmétique.

SIXIEME DEFINITION.

7. *L'égalité des raisons se nomme Proportion Géométrique, ou simplement Proportion.*

Les deux raisons de 2 à 4 & de 3 à 6 étant égales, ces nombres sont en proportion Géométrique.

SEPTIEME DEFINITION.

8. *Chaque différence & chaque raison supposant deux termes, la proportion qui dépend de l'égalité des différences & des raisons, suppose par conséquent quatre termes, dont le premier est nommé*

Premier Antécédent ; le second , Premier Conséquent ; le troisiéme, Second Antécédent ; le quatriéme, Second Conséquent.

Je marque les Proportions Arithmétiques avec trois points ; les Géometriques avec quatre , au milieu des termes de la proportion.

Proportion Arithmétique , 5 , 7 · . · 10 , 12.

C'est-à-dire, qu'il y a même différence entre 5 & 7 , qu'entre 10 & 12.

Proportion Géométrique , 3 , 6 : : 4 , 8.

C'est-à-dire , que la raison de 3 à 6 est égale à celle de 4 à 8 , que 3 est contenu deux fois en 6 , comme 4 est contenu deux fois en 8.

HUITIEME DEFINITION.

Le premier & le dernier terme d'une proportion s'appellent les Extrêmes de cette Proportion ; & le second & le troisiéme , ceux du milieu , ou les moyens. 9.

Proportion Arithmétique , 5 , 7 · . · 10 , 12.

Ces deux nombres 5 & 12 sont les Extrêmes de cette Proportion , & 7 & 10 les Moyens.

Proportion Géométrique , 3 , 6 : : 4 , 8.

Ces deux nombres 3 & 8 , sont les Extrêmes dans cette Proportion , & 6 & 4 les Moyens.

NEUVIEME DEFINITION.

Un même terme peut servir de premier Conséquent au premier Antécédent , & de second Antécédent au second Conséquent ; ainsi trois grandeurs 10.

suffisent pour faire une proportion. Pour lors cette proportion est dite Continue ; & la grandeur qui fait l'office de deux termes est appellée Moyenne proportionnelle.

Proport. Arithm. Continue, 5, 7 · . · 7, 9.

Proport. Géométr. Continue, 2, 4 : : 4, 8.

Pour abréger, on exprime cette opération Arithmétique avec une ligne entre deux points, la Géométrie avec une ligne entre quatre points.

÷ 5, 7, 9. *Proport. Arithm. Continue.*

∺ 2, 4, 8. *Proport. Géométr. Continue.*

DIXIEME DEFINITION.

11. *Si une Proportion Continue a plus de trois termes, elle s'appelle Progression.*

÷ 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, &c. *Progression Arith.*

∺ 2, 4, 8, 16, 32, 64, &c. *Progression Géométr.*

ONZIEME DEFINITION.

12. *Le premier & le dernier terme d'une Progression sont appellés les Extrêmes, & on nomme Moyens ceux qui sont entre ces Extrêmes.*

SECTION SECONDE

DE LA PROPORTION ET PROGRESSION ARITHMÉTIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Méthode pour connoître les propriétés de la Proportion & Progreſſion Arithmétique.

SElon la définition de la Progreſſion Arithmétique, il y a une même différence entre tous les termes comme en celle-ci. 13.

÷ . *a* *b* *c* *d* *e* *f* *g* *h* *i* *k* &c.
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19

La différence de *b* avec *a* eſt 2 : celle de *c* avec *b* eſt encore 2 ; ainſi de ſuite : d'où il eſt évident que puiſque le ſecond terme *b* n'eſt que le premier *a* augmenté de la différence qui regne dans cette progreſſion, connoiſſant le premier terme *a* avec la différence de la progreſſion, on connoîtra *b*, avec lequel on connoîtra *c* qui ne differe de *b* que parce qu'il a par-deſſus lui une grandeur connue. Ainſi on connoîtra tous les autres termes de cette progreſſion, fuſſent-ils infinis en nombre.

Les choſes ne ſont obſcures, que parce que nous ne les enviſageons, pour ainſi dire, que par

un endroit qui n'est point éclairé, ou que nous ne tâchons point d'ôter de certains voiles qui les cachent, & les font paroître différentes de celles que nous connoissons. Le secret des sciences, c'est de dévoiler les choses, & de les faire paroître telles qu'elles sont; en sorte que ce qu'elles ont de semblable paroisse, & qu'en même tems on apperçoive & qu'on distingue bien tout ce qui fait leur différence. Dans cette progression que nous venons de proposer comme dans toutes les autres, ces termes paroissent tous différens; & de la maniere que je les ai exprimés, vous ne voyez point en quoi ils sont conformes, & en quoi ils different. Puisque deux termes qui se suivent ne sont différens que par une certaine grandeur, dont l'un est plus grand, l'autre plus petit, il est évident que l'un, plus ou moins cette grandeur, doit être égal à l'autre. b est différent de a, parce qu'il est plus grand que a de deux unités. Si je nomme donc x ces deux unités, il faut que $a+x$ soit égal à b. Ainsi $a+x=b$, ou $b-x=a$. Par la même raison $b+x=c$, ou $c-x=b$. De même de tous les autres termes.

Par conséquent il est facile d'exprimer toute cette progression, de maniere qu'on voye dans tous ses termes, ce qu'ils ont de commun, & en quoi ils different. Car puisque $a+x=b$; donc au lieu de b je pourrai écrire $a+x$: & puisque $b+x=c$, donc $a+x+x$, ou $a+2x=c$; & par la même raison $a+3x=d$, je réduis donc la progression proposée à celle-ci, qui est la même, je n'en change que les expressions.

$$\div a . a+x . a+2x . a+3x . a+4x . a+5x . a+6x, \&c.$$

1 3 5 7 9 11 13

Avec cela seul, nous allons découvrir & dé-

montrer toutes les propriétés des Proportions & Progressions Arithmétiques. Ce que je viens de dire en plusieurs paroles, je le renfermerai dans la Proposition suivante.

LEMME.

Dans une Proportion Arithmétique l'antécédent, plus ou moins sa différence d'avec son conséquent, est égal à son conséquent. 14.

Soit b l'antécédent, d le conséquent : c leur différence. Si b surpasse d de la grandeur c, il est bien évident qu'ajoutant à d ce qui lui manquoit, ou retranchant de b l'excès qu'il a par-dessus d, ces deux grandeurs seront égales, $d+c=b$, ou $b-c=d$. Si au contraire b est plus petit que d de la grandeur c, ajoutant à b ce qui lui manque, $b+c=d$, ou retranchant de d ce qu'il a par-dessus b, alors on fait $b=d-c$. Si dans cette progression $\div$ 1. 3. 5. 7. &c. la différence est 2, il est évident que $1+2=3$, & $3+2=5$, ou que $3-2=1$, & $5-2=3$.

COROLLAIRE I.

De-là il s'ensuit qu'on peut exprimer en la maniere suivante, deux termes dont on connoît la différence. 15.

Si $b+c=d$, ou si $b-c=d$, par tout où se trouvera d, je pourrai substituer $b+c$ ou $b-c$, selon que b sera ou plus grand ou plus petit que d. Pour abréger, je supposerai dans les Démonstrations suivantes, que le conséquent d est toujours plus grand que l'antécédent b ; s'il étoit plus petit, il ne faudroit que changer le signe $+$ en $-$.

COROLLAIRE 2.

16. *On peut marquer tous les différens termes d'une Progression Arithmétique, de maniere qu'ils ayent presque le même nom.*

Soit cette Progression ÷ *b. d. f. g. h. &c.* je suppose que la différence qui regne entre tous ces termes est *c*. Ainsi $b+c=d$; & puisque *f* surpasse *d* de *c*, il faut que $b+c+c$, ou $b+2c=f$, par la même raison $b+3c=g$; & $b+4c=h$; ainsi cette progression se trouve réduite à celle-ci: ÷ $b.\ b+c\ \ b+2c\ \ b+3c\ \ b+4c$ &c. Ainsi cette progression ÷ 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. peut être changée en celle-ci: ÷ $1.\ 1+2.\ 1+4.\ 1+6.\ 1+8.\ 1+10.$

CHAPITRE II.

Propositions touchant les propriétés des Proportions & Progressions Arithmétiques.

PREMIERE PROPOSITION.

Théorême I.

17. *DAns une Proportion Arithmétique, la somme des Extrêmes est égale à celle des Moyens.*

Soient en Proportion Arithmétique ces quatre termes *b. d* ·.· *e. f.* ou 3. 5 ·.· 7. 9, il faut démontrer que l'addition de *d* avec *e*, qui sont les Moyens, fait une somme égale à celle de *b* & de *f*, qui sont les Extrêmes de cette proportion, c'est-à-dire, que $b+f=d+e$, ou que $3+9=5+7$.

Soit la différence de *b* à *d* nommée *c*, qui sera aussi par la définition de cette proportion, celle de *e* avec *f*. Donc s̃ n. 15. $b+c=d$, & $e+c=f$; ainsi les quatre termes de cette Proportion se peuvent réduire à cette expression $b.\ b+c$ ·.· $e.\ e+c$. Il faut donc démontrer que le premier terme *b*, plus le dernier qui est $e+c$ sont égaux au second terme $b+c$, plus le troisiéme terme qui est *e*, c'est-à-dire que $b+e+c=b+c+e$; ce qui est évident, puisque les grandeurs sont les mêmes de part & d'autre. Cette proportion 3. 5 ·.· 7. 9. étant changée en celle-ci qui est la même, 3. $3+2$ ·.· 7. $7+2$. il est évident que les Moyens $3+2+7$ sont la même chose que les Extrêmes $3+7+2$.

COROLLAIRE I.

18. *Dans une progression Arithmétique, l'addition de deux termes également éloignés des deux Extrêmes, est égale à celle des Extrêmes.*

Soit cette progression ÷ *b. c. d. e. f.* ces termes *c* & *e* sont également éloignés des Extrêmes *b* & *f*. Je dis que $c+e$ est égal à $b+f$; ce qui est évident : car il y a même différence entre *b* & *c*, qu'entre *e* & *f*, selon la définition de la progression: Donc ces quatre grandeurs sont en proportion *b. c* ·.· *e. f*. Ainsi par ce Théorême $b+f=c+e$; ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE 2.

19. *Dans une Proportion continue, & de même dans une Progression, dont le nombre des termes est impair, le terme du milieu ajouté à lui-même, est égal à l'addition des Extrêmes.*

Soient *b. c. d.* une proportion continue ; qu'on peut aussi regarder comme si c'étoit une progression. Le terme du milieu de cette progression est *c* ; lequel terme tient lieu de deux termes, sçavoir de Conséquent à *b* & d'Antécédent à *d*, par les définitions de la proportion continue, ou de la progression. On peut donc considérer ce seul terme comme deux termes Moyens, qui avec *b* & avec *d* font cette proportion, qui a quatre termes, *b. c* ∴ *c. d.* Or par ce Théorême $b+d=c+c$, ou $b+d=2c$, qui est ce qu'il falloit prouver.

Seconde Proposition.

Second Théorême.

20. *En toute Progression Arithmétique, chaque terme renferme le premier, & outre cela autant de fois la différence qui regne dans cette progression, qu'il y a de termes avant lui.*

Soit le premier terme d'une progression Arithmétique, de tant de termes qu'on voudra. Si la différence qui regne est x ; le premier terme étant b, le second sera $b+x$, le troisiéme $b+2x$; ainsi de suite, § n. 16. Si la progression est de six termes, le sixiéme sera $b+5x$, qui renferme le premier b, & outre cela autant de fois la différence x, qu'il y a de termes avant lui, sçavoir 5, comme il est évident.

Troisiéme Proposition.

Troisiéme Théorême.

21. *Ayant retranché le premier terme du dernier,*

le reste est égal au produit, fait de la différence qui regne dans la progression par le nombre des termes qui précédent le dernier terme.

Soit b le premier terme, & $b+5x$ le dernier; & ayant retranché b de $b+5x$, le reste est $5x$, qui, comme on voit, est le produit de x différence, multipliée par 5, nombre des termes qui précédent ce dernier terme $b+5x$. Donc, &c.

Quatriéme Proposition.

Premier Problême.

Connoissant les trois premiers termes d'une proportion Arithmétique, connoître le quatriéme. 12.

Soient en proportion Arithmétique ces quatre termes $a . b \cdot\!\cdot\!\cdot\, c . x$, dont les trois premiers sont connus. On cherche x le quatriéme. On connoît la différence du premier avec le second. Que ce soit d; la différence du troisiéme avec x est la même que celle de a avec b : Ainsi puisque $a+d = b$, de même $c+d=x$, & partant x n'est plus inconnu.

Ces trois nombres donnés 10, 15, 13, sont les trois premiers termes d'une proportion Arithmétique dont on cherche le quatriéme terme, c'est-à-dire un nombre qui ait le même excès par-dessus 13, que 15 a par-dessus 10. Cela se trouve en deux manieres.

Il faut ajouter à 13 la différence qui est entre 10 & 15, sçavoir 5. Par la définition de la proportion, le nombre 13, avec cette différence, sera le quatriéme terme qu'on cherche, comme il est évident. Ou, ce qui est la même chose, il faut ajouter les termes Moyens 15 & 13 en une somme, de laquelle ayant retranché le premier terme 10,

ce qui restera sera le quatriéme terme, puisque par la premiere proposition, § n. 17. ce quatriéme terme ajouté au premier, égale la somme des Moyens; ainsi ayant ajouté 13 avec 15, ce qui fait 28, & en ayant retranché le premier terme 10, le reste qui est 18, sera le quatriéme terme proportionnel aux trois donnés.

Cinquieme Proposition.

Second Problême.

23. *Continuer une Progression Arithmétique, dont on connoît le premier terme, & la différence qui est entre le premier & le second.*

Soit le premier terme b, la différence d'avec le second est c. Chaque terme surpasse celui qui le précede de cette différence, selon la définition de la progression; donc si le premier est b, le second sera $b+c$, le troisiéme $b+2c$, le quatriéme $b+3c$; ainsi de suite, ajoutant toujours la différence avec le précédent.

Sixiéme Proposition.

Troisiéme Problême.

24. *Connoissant le premier terme d'une progression avec le dernier, & combien elle a de termes, connoître la différence qui regne dans cette progression.*

Soit b le premier terme d'une progression, & f le dernier, le nombre des termes est n; il faut trouver la différence x qui est inconnue. Ayant retranché b de f, le reste $f-b$ est égal, § n. 21, à $nx-1x$ produit de x différence par $n-1$;

nombre des termes qui précédent le dernier; partant divisant $f-b$ par $n-1$, le quotient de cette division sera la différence qu'on cherche. L. 2, n. 30.

Question.

Une personne distribue pendant huit jours quelque aumône à des pauvres, le premier jour elle leur donne 5 sols, le dernier jour 26, & chaque autre jour un certain nombre plus que le précédent, augmentant tous les jours également: on demande de combien elle a augmenté, ou combien elle a donné chaque jour. On voit bien que ces aumônes de chaque jour sont une progression dont le premier terme & le dernier sont connus, & en même tems combien une progression a de termes, sçavoir 8: il ne s'agit donc que de connoître la différence. Le premier terme de cette progression est 5, le huitiéme terme est 26. Pour satisfaire à la question, il faut ôter 5 de 26, le reste 21 par le Théorême troisiéme, est le produit de la différence qui regne dans la progression, multipliée par 8—1 ou 7, nombre des termes qui précedent le dernier, lequel dernier terme est ici le huitiéme. Divisant donc 21 par 7, le quotient 3 de cette division sera la différence qu'on cherche. Ainsi cette personne a donné le second jour 8 sols, le troisiéme 11 sols, &c.

Septieme Proposition.

Quatriéme Problême,

Le premier & le dernier terme étant donnés avec la différence, trouver combien la progression a 25. *de termes.*

Soit b le premier terme, le dernier est f, la différence qui regne dans cette progression soit d : je nomme z le nombre des termes de cette progression, qui est inconnu. Selon le Théorême, § n. 21. ayant retranché b du dernier f, ce qui restera, sçavoir $f-b$, sera égal à $zd-1d$ produit de la différence d, multipliée par $z-1$, nombre des termes qui précédent le dernier terme. Divisant donc $f-b$ égal à $zd-1d$ par d, le quotient $\frac{f-b}{d}$ sera le nombre des termes qui précédent f, pour lequel dernier terme f ajoutant 1 au quotient $\frac{f-b}{d}$: Ainsi $\frac{f-b}{d}+1=z$ on aura le nombre des termes de toute la progression : ce qu'on demandoit.

QUESTION.

Un Marchand empruntant de l'argent d'un Usurier, s'est engagé de lui payer le premier mois 4 écus, le second 4 écus, plus 2, c'est-à-dire 6. ainsi de suite en Progression Arithmétique. Il se trouve que le dernier mois il paye 22 écus d'intérêts ; on demande combien il s'est écoulé de mois, c'est-à-dire combien cette Progression a de termes. Par cette septiéme Proposition on trouvera qu'il y en a dix : car ôtant le premier terme 4 du dernier 22, reste 18, qui divisé par la différence 2 donne 9 au quotient pour le nombre des termes qui sont avant le dernier, pour lequel dernier terme, ajoutant 1 au nombre 9 des neuf autres qui le précédent, on a 10 pour le nombre de tous les termes de la progression.

HUITIEME PROPOSITION.

Cinquiéme Problême.

Le premier & le dernier terme d'une progression Arithmétique étant connus, avec la différence ou avec le nombre des termes, connoître tous les termes interposés. 26.

Soit b le premier terme, & f le dernier : Si avec cela la différence qui regne dans la progression est connue, on connoîtra aisément tous les autres termes, ṡ n. 23. Mais si c'est le nombre des termes seulement qu'on connoît, il faut alors chercher la différence qu'on trouvera par le Problême troisiéme, ṡ n. 24. & par même moyen on connoîtra toute la progression.

NEUVIEME PROPOSITION.

Sixiéme Problême.

Le premiere terme d'une progression étant donné, avec la différence qui y regne, trouver un terme proposé de cette progression.

Soit le premier terme, la différence est d : c'est le septiéme terme que l'on cherche : pour le trouver il faut multiplier la différence par le nombre des termes qui le précédent, c'est-à-dire d par 6, puisque c'est le septiéme terme qu'on cherche ; le produit est $6d$, auquel il faut encore ajouter le premier terme b, & on aura par le second Théorême, ṡ n. 20. $6d+b$, ou $b+6d$ pour septiéme terme de la progression proposée ; ce qu'on cherchoit.

QUESTION.

Un Jardinier a cueilli des pommes d'un pommier pendant douze années; la premiere année il a cueilli 5 pommes, la seconde 60 plus que la premiere, la troisiéme 60 plus que la seconde; ainsi de suite jusqu'à la douziéme année. L'on demande combien il a cueilli de pommes la douziéme année. Le nombre des pommes cueillies chaque année fait une progression Arithmétique, dont le premier terme est 5, & la difference qui regne dans la progression est 60 : Ainsi, selon cette neuviéme Proposition : le douziéme terme doit être 665.

DIXIEME PROPOSITION.

Septiéme Problême.

18. *Le premier terme d'une progression étant donné, & la différence qui y regne, connoître à quelle place de cette progression est un certain nombre proposé.*

Le premier terme de la progression proposée est b, la différence d, & $b+6d$ est un de ses termes, dont on demande la place dans cette progression. Il faut d'abord en retrancher b, le premier terme, ensuite il faut voir combien la différence d est de fois dans le reste de $6d$: elle y est 6 fois. Donc par le Théorême, § n. 20. le terme $b+6d$, est à la 7^e place de la progression, puisqu'il contient une fois le premier terme, plus 6 fois la différence d.

QUESTION.

Il y a une rangée d'arbres, on sçait que sur le

premier il y a une colombe, ſur le ſecond il y en a 6, ainſi de ſuite en progreſſion Arithmétique. Il y a un arbre ſur lequel il y en a 22 ; on demande à quelle place de la progreſſion eſt cet arbre. Par cette Propoſition on trouvera qu'il eſt à la dixiéme place.

ONZIEME PROPOSITION.

Problême huitiéme.

La différence, le nombre des termes, & le dernier terme étant donnés, trouver le premier terme. 29.

Soit y le premier terme qu'on cherche, le dernier eſt f, la différence eſt d, & n le nombre des termes. Par le ſecond Théorême, § n. 20. le dernier terme f eſt égal à $y + nd - 1d$. Otant donc $nd - 1d$, produit de la différence d, par $n - 1$, nombre des termes qui ſont avant le dernier f, ôtant, dis-je, ce produit du dernier terme f, le reſte ſera par conſéquent la valeur du premier terme y que l'on cherche.

QUESTION.

Une perſonne a dépenſé de l'argent pendant 10 jours, chaque jour elle a dépenſé 2 ſols plus que le jour précédent ; & le dernier jour elle en a dépenſé 22. On demande, combien de ſols cette perſonne a dépenſé le premier jour, & chacun des ſuivans. On connoît la différence, le nombre des termes, & le dernier terme de cette progreſſion ; ainſi, par cette onziéme Propoſition, on trouvera que le premier jour cette perſonne avoit dépenſé 4 ſols, & le ſuivant 6 ſols. Ainſi de ſuite.

DOUZIEME PROPOSITION.

Quatrieme Théorême.

30. *En toute progression la somme des deux Extrêmes multipliée par la moitié du nombre de tous les termes, est égale à la somme de tous les termes.*

Soit cette progression ÷ $b, c, d, f, g, h, k, l, m, n, p, q$.

Nous avons prouvé, § n. 18. que dans une progression Atrithmétique, la somme de deux termes également éloignés des Extrêmes, est égale à celle des Extrêmes : Ainsi tous les

$$b+q= \left\{ \begin{array}{l} c+q \\ d+n \\ f+m \\ g+l \\ h+k \end{array} \right.$$

moyens étant pris deux à deux sont des sommes égales $c+p=d+n=f+m=g+l$, &c. Donc comme il y a ici douze termes, six fois la somme des Extrêmes est égale à la somme de tous les termes. Par conséquent la somme des Extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes, est égale à la somme de tous les termes.

COROLLAIRE I.

31. *Si le nombre des termes d'une progression est impair, leur somme entiere est égale au produit du moyen multiplié par le nombre de tous les termes.*

Car si la somme des deux Extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes, est égale à la somme de tous ces termes, la moitié de la somme des Extrêmes multipliée par le nombre entier de tous les termes, doit être égale à la somme de tous les termes. Or le moyen vaut la moitié de la somme des Extrêmes, puisqu'ajouté à lui-même il vaut cette somme § n. 19. Donc

&c. Soit retranché de la progreſſion précédente, le terme q, de ſorte qu'il ne reſte plus qu'onze termes, dont le moyen eſt b. Alors $b+b$, ou $2b=b+p$; donc multipliant b par 11, le produit $11b$ ſera égal à la ſomme de tous ces onze termes.

COROLLAIRE 2.

Dans une progreſſion Arithmétique dont le premier terme eſt zéro, ſi on multiplie le dernier z *par* x, *nombre des termes de la progreſſion, le produit qu'on aura ſera le double de la ſomme de tous les termes.* 32.

Le dernier terme z, avec zéro le premier terme, ce qui ne fait que z, étant multiplié par la moitié de x nombre des termes, eſt égal à la ſomme de tous les termes de cette progreſſion; donc multiplié par tout x, il eſt le double de toute cette ſomme. C'eſt-à-dire que xz eſt le double de toute la progreſſion.

TREIZIEME PROPOSITION.

Cinquiéme Théorême.

Une progreſſion Arithmétique peut être continuée à l'infini, en montant. Elle ne le peut en deſcendant, ſi ces termes ne ſont d'une grandeur négative. 33.

Ajoutant à un terme d'une progreſſion la différence qui regne dans la progreſſion, on a le terme ſuivant: ainſi on la peut augmenter ou continuer à l'infini, en montant. Mais on ne le peut faire en deſcendant, ſi ces termes ſont des grandeurs poſitives. Car ſoit cette progreſſion $\div$ $o.\ a.\ b.\ c.$ qu'on ait continuée en deſcendant, juſqu'à ce que

x différence qui regne dans la progression soit telle que $a-x=0$; je dis qu'on ne peut pas trouver un terme au-dessous de a, & plus grand que o. Si on suppose que z est ce terme, alors $z+x=a$; partant $z=a-x$. Or $a-x=0$; donc $z=0$, & par conséquent z n'est pas plus grand que zéro.

Mais si dans une progression Arithmétique il y a des grandeurs négatives, elle peut être continuée en montant & en descendant. Soit une progression dont 1 est la différence, il est évident qu'il y a la même différence entre o+1 qu'entre o—1 ; sçavoir la valeur de 1. Ainsi cette progression peut être augmentée à l'infini, soit en montant, soit en descendant, ÷ 3. 2. 1. 0.—1. —2.—3. &c.

Quatorzieme Proposition.

Problême neuviéme.

34. *Le premier terme, la différence & le nombre des termes étant donnés, trouver la somme de la progression.*

Il faut trouver le dernier terme par le moyen du sixiéme Problême, s. n. 27. & l'ayant ajouté au premier, on aura la somme des Extrêmes, qui étant multipliée par la moitié du nombre des termes, on aura par le Théorême, s. n. 27, la somme de toute la progression ; ce qu'on demandoit.

Quand le nombre des termes est impair ; il faut chercher la valeur du moyen. Par exemple, si le nombre des termes étoit onze, le terme moyen est le sixiéme terme dont il auroit fallu chercher la valeur par la Proposition, s. *n.* 27. ensuite multiplier ce moyen par le nombre en-

tier des termes de la progreſſion, le produit ſeroit la ſomme de tous les termes de la progreſſion, par le premier Corollaire de la Propoſition douziéme, s̃ n. 31.

QUESTION.

Un Capitaine a rangé ſes Soldats de maniere qu'au premier rang il y a trois Soldats, au ſecond 5 ; il y a 12 rangs. On demande combien il y a de Soldats, c'eſt-à-dire, quelle eſt la ſomme de cette progreſſion ? Par cette quatorziéme Propoſition cette ſomme eſt 168.

QUINZIEME PROPOSITION.

Problême dixiéme.

La différence, le nombre des termes, & la ſomme 35.
de la progreſſion étant donnés, trouver les Extrêmes, & chacun des interpoſés.

La différence eſt c, qui vaut 2, le nombre des termes eſt 12, la ſomme de la progreſſion eſt 168. Soient x & z ſes Extrêmes qu'il faut trouver avec leurs interpoſés. Puiſque par la Propoſition, s̃ n. 10. la ſomme des Extrêmes multipliée par la moitié du nombre des termes eſt égale à la ſomme de toute la progreſſion : donc diviſant la ſomme de la progreſſion par la moitié du nombre des termes, le quotient ſera la ſomme des Extrêmes. Ainſi ayant diviſé 168 par 6, moitié de 12, nombre des termes, le quotient 28 eſt égal à x le premier terme, plus z le dernier ; ce qui s'exprime ainſi $28 = x + z$; & par la ſeconde Propoſition, s̃ n. 20. $x + 11c$, ou $x + 22 = z$. Donc $28 = x + x + 22$. Otant

de part & d'autre 22, reftera $6=x+x$. Dond $3=x$. Ainfi le premier terme eft 3. Mais $x+22=b$: Donc $z=3+22$, ou $z=25$. La différence qui regne dans la progreffion eft connue: fçavoir c ou 2; donc le fecond terme fera 5, le troifiéme fera fept, &c.

QUESTION.

Une Fontaine artificielle a 12 jets d'eau différens, le fecond jette dans une heure deux pintes d'eau plus que le premier, le troifiéme deux pintes plus que le fecond, & ainfi de fuite, & tous enfemble jettent 168 pintes d'eau dans une heure. L'on demande combien chacun des jets de cette Fontaine jette d'eau dans une heure.

L'on connoît la différence qui regne dans cette progreffion, fçavoir 2, le nombre des termes qui eft 12, la fomme de tous les termes qui eft 168; ainfi par cette quinziéme Propofition on trouvera que le premier jette dans une heure trois pintes d'eau, le fecond cinq pintes, le troifiéme fept pintes; ainfi de fuite.

SEIZIEME PROPOSITION.

Probléme onziéme.

36. *Connoiffant le nombre des termes d'une progreffion Arithmétique, & leur fomme avec le premier & dernier terme, connoître le refte.*

Le nombre des termes eft n, leur fomme eft f. Soit x le premier ou le dernier terme qu'on ne connoît pas. Il faut en premier lieu divifer la fomme f par la moitié de n nombre des termes. Le quotient de cettte divifion; felon ce qui

a été démontré dans la Propofition précédente, fera la fomme du premier & du dernier terme, d'où ôtant le premier, le refte fera le dernier, d'où ôtant le dernier, le refte fera le premier, comme il eft évident. Enfuite on trouvera la différence par le Problême, § n. 24. laquelle étant une fois connue, on trouvera aifément tout le refte de la progreffion.

QUESTION PREMIERE.

Un débiteur eft obligé de payer la premiere femaine une livre, la fuivante quatre livres, la troifiéme fept livres, ainfi chaque femaine trois livres plus que dans la précédente. On demande combien il doit payer la vingt-huitiéme femaine.

Dans cette progreffion le nombre des termes eft connu: la différence qui y regne, & le premier terme. Par la neuviéme Propofition on trouvera que la fomme qu'il doit payer eft 82 livres. Car multipliant 27, nombre des termes qui précédent celui qu'on cherche par trois, différence qui regne dans la progreffion, le produit eft 81, auquel ajoûtant le premier terme 1, cela fait 82, qui eft le vingt-huitiéme terme.

QUESTION SECONDE.

Un débiteur ayant payé quatre-vingt-deux livres la vingt-huitiéme femaine, & payé trois livres de moins la femaine précédente, fçavoir la vingt-feptiéme, & toujours de même en rétrogradant, on demande combien il a dû payer la premiere femaine.

Le nombre des termes qui précédent le 28^{e}, fçavoir 27 multiplié par la différence 3; c'eft-

à-dire 81, plus le premier terme est égal à 82, selon qu'on l'a vû dans la question précédente: Donc de 82 ôtant 81, le reste 1 sera le premier terme qu'on demande, ou ce que le débiteur a payé la premiere semaine.

QUESTION TROISIEME.

Un débiteur doit pendant vingt-huit semaines payer à la fin de chacune une certaine somme, qui croît également chaque semaine; la premiere il a payé une livre, la derniere quatre-vingt-deux livres: on demande quelle est cette augmentation, c'est-à-dire, quelle est la différence qui regne en cette progression.

Otez de 82 dernier terme le premier 1, reste 81; divisez ce nombre par le nombre des termes moins 1, par conséquent par 27, le quotient 3 marquera cette différence, selon ce qu'on vient de voir dans les deux Questions précédentes.

QUESTION QUATRIEME.

Un débiteur a payé la premiere semaine une livre, la seconde quatre, la troisiéme sept, de sorte que la différence de la progression est trois; à la fin de la derniere semaine il a payé 82: on demande le nombre de ces semaines.

Le dernier payement & le dernier terme de la progression est 82, dont j'ôte le dernier terme, reste 81, que je divise par 3, différence de la progression; le quotient de la division est 27; ainsi il y a 27+1 termes; c'est-à-dire 28; ce qu'on demandoit.

QUESTION

QUESTION CINQUIEME.

Le débiteur doit payer pendant vingt-huit semaines à la fin de chacune un certain prix croissant de trois livres : à la fin de la premiere il a payé une, & à la fin de la vingt-huitiéme quatre-vingt-deux : on demande combien il a payé en tout.

Le premier & le dernier terme 1+82 multiplié par la moitié du nombre des termes, sont égaux à la somme de tous les termes de la progression, v. n. 30. multipliant donc 1+82 ou 83 par 14, puisqu'il y a 28 termes, le produit 1162 est la somme que l'on demande.

QUESTION SIXIEME.

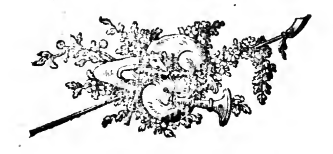
Un débiteur doit payer mille cent soixante-deux livres en un certain nombre de semaines, il a payé la premiere semaine une livre, & la derniere quatre-vingt-deux, payant en chacune plus qu'en la précédente dans la même Progression, que dans les Questions précédentes ; on demande quel est le nombre de ces semaines.

Je divise 1162 par la somme du premier & dernier terme, c'est-à-dire par 1+82 : ou 83, le quotient est 14 ; je double ce quotient : ce qui m'apprend que 28 est le nombre des semaines qu'on demande.

QUESTION SEPTIEME.

Un débiteur doit payer mille cent soixante-deux livres en vingt-huit semaines, la premiere une livre, toujours dans la même progression : on demande ce qu'il payera la derniere semaine.

Je divise 1162 par la moitié de 28, c'est-à-dire par 14; le quotient est 83, dont je retranche le premier terme qui est 1, le dernier terme est 82 que je cherchois. Le débiteur doit donc payer 82 livres la derniere semaine.



SECTION TROISIEME.

DES RAISONS, ET DES PROPORTIONS ET PROGRESSIONS. GÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

On éclaircit la notion des Raisons.

CE mot *Raison*, comme je l'ai fait voir, ne signifiant en général qu'un rapport, l'idée en est confuse quand on ne spécifie point ce rapport. Avoir rapport, c'est être d'une certaine maniere au regard d'une autre : or dire en général qu'une chose est d'une certaine maniere au regard d'une autre, c'est parler confusément, au moins obscurément, si on ne spécifie cette maniere; car la paternité est un rapport du pere au fils, rapport dont il n'est point question dans les Mathématiques; ainsi, dire que les Raisons sont des rapports, ce n'est rien dire. On ne peut tirer d'une notion si générale des Raisons, aucune lumiere suffisante pour démontrer ce qu'on en propose dans les Mathématiques. Il est vrai que l'on ajoute que Raison c'est un rapport selon la quantité : mais quoique cela marque que l'on considere la quantité ou la grandeur des choses qu'on compare & qu'on rapporte l'une à l'autre ; néan-

moins on ne dit pas encore assez, puisque cette comparaison se peut faire en deux manieres; ainsi on ne donne pas une idée entiere de ce que c'est que raison, selon qu'on prend ce mot.

On a vû que l'on peut comparer deux grandeurs l'une avec l'autre, ou en considérant leur différence, ou examinant comment l'une contient l'autre, ou en est contenue. Ainsi pour donner une idée distincte des raisons, c'est-à-dire, des rapports des Grandeurs, en tant qu'on veut parler d'un rapport qui ne consiste pas dans la différence de deux grandeurs qu'on rapporte l'une à l'autre, il faut nécessairement dire que Raison c'est une maniere de contenir ou d'être contenu.

Ce qui a trompé plusieurs personnes, & leur a fait rejetter cette notion que nous donnons ici des Raisons, c'est qu'ils se sont imaginés que les Raisons, ainsi expliquées, ne pouvoient s'appliquer qu'aux Grandeurs, dont l'une contient l'autre ou en est contenue exactement tant de fois, & qu'on peut exprimer par nombres. Il y a, disent-ils, & ils ne se trompent pas en cela, une infinité de Grandeurs dont on ne peut pas dire que l'une soit contenue un certain nombre de fois dans l'autre: ainsi comment dire que la raison qu'elles ont entr'elles est la maniere dont elles se contiennent, puisque cette maniere est inconnue, & qu'il est impossible de l'exprimer; ce qu'on peut donc dire de leur raison, c'est que l'une a rapport à l'autre.

Voilà tout ce qu'ils peuvent dire contre la notion que je donne des raisons; mais cela n'a aucune force; car bien que je ne connoisse point la maniere précise qu'une Grandeur est contenue dans une autre, cela n'empêche pas que je ne pusse démontrer les propriétés des Raisons &

des Proportions Géométriques, suivant cette notion que je donne des Raisons. Si je sçai que *b* est contenu dans *c* comme *d* dans *f*, sans pourtant sçavoir si c'est exactement ou avec reste : suivant la définition des Proportions, je sçaurai certainement que ces quatre termes *b. c. d. f.* sont proportionnels. Ignorant, dis-je, la maniere dont *b* est contenu dans *c*, je pourrois faire voir que *d* est à *f* comme *b* à *c*. Si j'avois un moyen de démontrer qu'effectivement *d* est contenu dans *f* comme *b* l'est dans *c*, il ne seroit pas nécessaire que je pusse dire, précisément cette maniere, que par exemple *b* est le tiers de *c* comme *d* est le tiers de *f*. Il suffiroit que je fisse voir que si on supposoit *c* & *f* divisés en mille parties, si *b* étoit une milliéme partie de *c*, *d* seroit aussi une milliéme partie de *f*; & que si divisant *c* par *b* il y avoit un reste, divisant *f* par *d*, il y auroit aussi un reste ; & que si on concevoit ce reste de *c* divisé en mille parties, & le reste de *f* divisé aussi en mille parties, *b* seroit à chaque milliéme partie du reste de *c*, comme *d* à la milliéme partie du reste de *f*; ainsi à l'infini. Lors, dis-je, que cela peut se démontrer, il est évident que la maniere dont *d* est contenu dans *f* est la même que celle dont *b* est contenu dans *c*; ainsi cette définition des Raisons, que ce sont des manieres de contenir ou d'être contenu, convient à toutes les Raisons, tant à celles qu'on peut exprimer par nombre, qu'à celles qui ne le peuvent être. Il n'est pas même nécessaire d'ajouter dans la définition des Raisons, qu'il faut, afin que deux raisons soient semblables, que si on divise le premier & le second Antécédent en mille parties, & que le premier Conséquent soit une milliéme partie du premier Antécédent, le second conséquent soit aussi une millieme partie du

second Antécédent ; & que si le premier Conséquent se trouve plus petit qu'une milliéme partie du premier Antécédent, le second Conséquent se trouve aussi plus petit qu'une milliéme partie du second Antécédent. Car si cela n'étoit pas, les deux manieres de contenir ou d'être contenu ne seroient pas les mêmes. Une définition doit-être courte & nette. Nous démontrerons dans ces Elémens tout ce qu'on peut démontrer touchant les Raisons des Grandeurs en général, sans avoir besoin de cette addition.

CHAPITRE II.

Explication des termes dont on se doit servir.

PREMIERE DEFINITION.

37. *Raison de deux Grandeurs étant la maniere que l'une est contenue dans l'autre, ou qu'elle la contient : si cette raison se peut exprimer par un nombre, elle est appellée exacte, ou de nombre à nombre.*

Par exemple, si *a* est contenu exactement ou 2 fois, ou 3 fois, &c. dans *b*, on dit que la raison de *a* à *b* est une raison *de nombre à nombre.*

SECONDE DEFINITION.

38. *Lorsqu'une Raison n'est pas de nombre à nombre, elle est appellée Sourde.*

Si on ne peut exprimer par nombre la Raison de *b* à *c*, c'est-à-dire, combien de fois *b* est contenu dans *c*, ou qu'il contient *c*, cette raison est une Raison sourde.

TROISIEME DEFINITION.

La raison exacte ou de nombre à nombre, se divise en Raison d'égalité ou d'inégalité. 39.

La raison d'égalité, c'est lorsqu'une Grandeur est contenue précisément exactement une fois dans une autre, que l'une n'est pas plus grande que l'autre; en un mot, qu'elles sont égales.

La Raison d'inégalité se divise en celle qu'on appelle de plus grande inégalité, qui est quand on commence par le plus grand terme en le comparant au plus petit, comme 3 à 2; & celle de moindre inégalité est quand on commence par le plus petit terme en le comparant au plus grand, comme 2 à 3.

Ne confondez pas ces choses, Raison d'égalité, & égalité de Raison; elles sont différentes. Egalité de Raison est une similitude de Raison, comme l'égalité de la Raison de 3 à 6, & de celle de 2 à 4. La Raison d'égalité consiste dans l'égalité d'un Antécédent à son Conséquent, comme est la Raison de b *à* b.

Remarquez aussi qu'une Raison appartient proprement à l'Antécédent, c'est-à-dire, que dans une Raison ou rapport on considere premierement & principalement le terme Antécédent : comme dans ce rapport du pere au fils, qu'on nomme Paternité, *cette paternité appartient au pere. On appelle donc Raison de grande inégalité, quand l'Antécédent est plus grand que son Conséquent. On dit que cette raison est de moindre inégalité, lorsque l'Antécédent est plus petit au regard de son Conséquent.*

QUATRIEME DEFINITION.

La raison exacte d'une Grandeur à une autre, 40.

Grandeur reçoit différens noms, selon que l'Antécédent est contenu ou contient son Conséquent un certain nombre de fois.

La raison de deux termes s'appelle Double, lorsque l'un est contenu deux fois dans l'autre: Triple, s'il y est contenu 3 fois, &c. Lorsque le plus petit terme est l'Antécédent, on dit Sous-double, Sous-triple, &c.

Cinquieme Definition

41. *Divisant l'un des deux termes d'une Raison par l'autre terme, le quotient de cette division est appellé l'Exposant de cette Raison.*

Parce qu'il expose & fait connoître la maniere que l'un des deux termes contient l'autre, ou en est contenu. Ainsi divisant 12 par 6, le nombre 2 qui est le quotient de cette division, est l'Exposant de la Raison de 12 à 6.

Sixiéme Definition.

42. *On appelle particulierement Exposant d'une Raison, les moindres nombres qu'on puisse trouver, qui soient entr'eux comme les termes d'une Raison.*

Ainsi si b est la septiéme partie de c, les Exposans de la raison de b à c sont 1 & 7, qui sont les moindres nombres qui soient entr'eux, comme b est à c.

Septieme Definition.

43. *On dit que plusieurs termes sont proportionnels, lorsque comme le premier d'une part est au premier de l'autre part; ainsi le second d'une part*

est au second de l'autre part, & le troisiéme d'une part est au troisiéme de l'autre part. Ainsi de suite.
Ce qui se marque en ces deux termes.

Premiere maniere. 2. 5. 6. :: 4. 10. 12.
Seconde maniere. 2. 4. :: 5. 10. :: 6. 12.

HUITIEME DEFINITION.

Les termes homologues d'une proportion sont ceux qui sont de meme nom, & tiennent la meme place chacun en son rang. 44.

Ainsi dans la proportion précédente 2 & 4, 5 & 10, 6 & 12. qui sont ou Antécédens ou Conséquens, sont les termes *homologues* de cette proportion. Car parmi les Antécédens 2 est le premier, comme 4 est le premier Conséquent parmi les Conséquens; si 5 est le second Antécédent, 10 de son côté est le second Conséquent, &c.

NEUVIEME DEFINITION.

Proportion ordonnée, c'est l'arrangement de plusieurs Grandeurs d'une part, & d'autant de Grandeurs d'une autre part, disposées de telle sorte que la premiere du premier ordre soit à la seconde du premier ordre, comme la premiere du second ordre est à la seconde du second ordre, &c. 45.

Voilà une proportion ordonnée.

12. 4. 2. 8. :: 30. 10. 5. 20.

DIXIEME DEFINITION.

Proportion troublée c'est l'arrangement de plusieurs Grandeurs d'une part, & d'autant d'autres Grandeurs d'une autre part, disposées de telle sorte 46.

que la premiere du premier ordre soit à la seconde, comme la pénultiéme du second ordre à la derniere; puis la seconde du premier ordre à la troisiéme, comme l'antépénultiéme du second ordre à la pénultiéme; & ainsi de suite.

Voilà une proposition troublée.

12. 4. 2 :: 18. 9. 3.

ONZIEME DEFINITION.

47. *La proportion Géométrique droite, c'est celle dont les termes sont disposés par ordre chacun en son rang.*

Comme 3 est à 6, de même 4 est à 8 : cette proportion ainsi rangée 3. 6 :: 4. 8. est droite.

DOUZIEME DEFINITION.

48 *Si le premier terme est au second comme le quatriéme au troisiéme, cette proportion s'appelle Renversée, & alors on dit que les deux premiers termes sont réciproques aux deux autres.*

3. 6 :: 4. 8. Ces quatre termes étant ainsi rangés 3. 6 :: 8. 4. la proportion est renversée, & 3 est à 6 réciproquement, comme 8 est à 4.

CHAPITRE III.

Explications de quelques termes moins utiles.

JE ne dois point passer sous silence l'explication de certains autres termes qui se trouvent dans les Livres. Il faut donc sçavoir que l'une & l'autre Raison de plus grande inégalité & de moindre inégalité, sont distinguées en cinq especes.

Il y a cinq especes de Raison de plus grande inégalité. La premiere s'appelle *Multiple*; la seconde, *Surparticuliere*; la troisiéme, *Surpartiente*; la quatriéme, *Multiple surparticuliere*: la cinquiéme, *Multiple surpartiente*.

La raison *Multiple* est quand la plus grande contient tant de fois précisément la plus petite, comme 6 contient trois fois 2, ainsi 6 est multiple de 2.

La raison *Surparticuliere*, c'est lorsqu'un nombre en contient un autre, une fois, plus une partie, comme la raison de 3 à 2 est surparticuliere; car 3 contient une fois 2, & outre cela une partie de 2.

Les raisons surparticulieres reçoivent différens noms; ce mot *sesqui*, est un terme dont on se sert pour exprimer l'unité: ainsi Raison *sesquialtere* est quand un nombre en contient un autre une fois, & une moitié de ce nombre. La Raison de 3 à 2 est *sesquialtere*; La raison de 4 à 3 est *sesquitierce*; parce que 4 contient une fois 3, & un tiers de 3; la Raison de 5 à 4 est *sesquiquarte*, parce que 5 contient une fois 4 & une quatriéme partie de 4.

Raison *surpartiente* est quand la plus grande contient la plus petite une fois, & qu'elle contient outre cela plus d'une de ses parties. La Raison de 5 à 3 est *surpartiente*, parce que 3 est contenu une fois dans 5, outre cela il y a plus d'une partie de 3 dans 5; car la troisiéme partie de 3 y est contenue deux fois, outre que 3 y est contenu une fois; ainsi cette raison de 5 à 3 est nommée *Surbipartiente-tierce*, celle de 7 à 4 *Surtripartiente-quarte*; ainsi cette raison reçoit différens noms.

Raison *Multiple Surparticuliere* est quand le plus grand nombre contient le plus petit pour le moins deux fois, & outre cela une des parties du plus petit. Telle est la raison de 5 à 2, car 2 est

contenu 2 fois dans 5, outre cela 5 contient une partie de 2, ce qui s'appelle encore Raison *double-sesquialtere*, comme celle de 7 à 3 *double sesquitierce*, celle de 13 à 4 *triple sesquiquarte*, parce que 13 contient 3 fois 4, plus une quatrieme partie de 4.

Raison *Multiple Surpartiente* est quand le plus grand nombre contient 2 ou plusieurs fois le plus petit, & plus d'une de ses parties. Telle est la Raison de 8 à 3, 8 contient 2 fois 3, plus 2 parties de 3; c'est pourquoi cette Raison est nommée Raison *double surbipartiente-tierce*: la Raison de 15 à 4, Raison *triple surtripartiente-quarte*.

Les cinq especes de la Raison de moindre inégalité, ne different de celle dont nous venons de parler, que par cette particule *sous*, qu'on appose à leur nom; au lieu de dire *multiple*, ont dit *sous-multiple*, *sous-surparticuliere* au lieu de dire *surparticuliere*: ainsi tout ce qu'on a dit des cinq especes de la Raison de la grande inégalité, se doit entendre des especes de la raison de moindre inégalité. Par exemple, la Raison de 4 à 3, qui est de grande inégalité, est surparticuliere; la Raison de 3 à 4, qui est de moindre inégalité, est une Raison sous-particuliere.

Il n'est pas nécessaire de forcer sa mémoire à retenir ces noms, on ne doit pas même s'en servir: si une Raison est de nombre à nombre, il faut l'exprimer par ses Exposans. Par exemple, si la Raison de *b* à *d* est triple sesqui-quarte, au lieu de me servir de ces termes embarrassans, je dirai simplement que *b* est à *d*, comme 13 est à 4.

On trouve aussi dans les auteurs les termes suivans, lesquels j'expliquerai pour la même raison, quoique je ne m'en serve pas dans ces Elémens.

Une grandeur eſt appellée *Multiple* au regard de ſes parties, qui étant priſes un certain nombre de fois, lui ſont égales : ainſi 24 eſt multiple de 6. Or on dit que deux grandeurs ſont multiples pareils ou *équimultiples* lorſqu'elles contiennent les parties dont elles ſont les multiples un même nombre de fois : ainſi 10*b* & 10*d* ſont des multiples pareils.

Lorſqu'une partie d'une Grandeur eſt contenue préciſément tant de fois dans ſon tout, 2 fois ou 3 fois, &c. cette partie eſt appellée *Aliquote* de cette Grandeur : ainſi 5 eſt aliquote de 15. Il n'y a point de nombre qui tout au moins n'ait pour aliquote l'unité ; car tout nombre eſt contenu une fois en lui même.

Si les parties aliquotes d'une Grandeur ſont autant de fois dans leur tout, que les parties aliquotes d'une autre Grandeur ſont dans le leur, elles ſont appellées *Aliquotes pareilles* : ainſi 3 & 4 ſont les aliquotes pareilles de 9 & 12 ; car 3 eſt contenu 3 fois dans 9, comme 4 eſt contenu trois fois dans 12.

On appelle *Aliquote commune* un nombre qui étant pris autant qu'il faut, eſt égal à deux autres nombres ; ainſi 3 eſt aliquote commune de 9 & de 12 ; car 3 pris trois fois eſt égal à 9, & pris 4 fois il eſt égal à 12. Deux nombres ont tout au moins pour leur commune aliquote l'unité ; car il eſt manifeſte que l'unité répétée autant qu'il faut, eſt égale à quelque nombre que ce ſoit.

CHAPITRE IV.

Des Propriétés des Raisons, & des Proportions Géométriques.

PREMIER AXIOME.

50. *Les Raisons égales ont des Exposans égaux.*

SECOND AXIOME.

51. *Les Grandeurs égales ne peuvent être les Exposans que de Raisons qui soient égales.*

LEs Raisons sont des manieres de contenir ou d'être contenu ; d'où il est évident que deux raisons sont égales, c'est-à dire, que celle de *b* à *d* est la même que celle de *f* à *g*, lorsque *b* contient ou est contenu dans *d* comme *f* dans *g* ; ou, ce qui est une même chose, que divisant *b* & *d* l'un par l'autre, le plus grand par le plus petit, le quotient de cette division est le même que de la division de *f* par *g*. Car le quotient n'est qu'un signe ou une expression de la maniere qu'une Grandeur est contenue dans celle qu'elle divise. Ces quotiens sont appellés les exposans de ces Raisons par la sixiéme définition ci-dessus, n. 41. qui seront ainsi égaux, si ces quotiens sont égaux ; les démonstrations du reste de ce Livre roulent toutes sur ces deux Axiomes.

TROISIEME AXIOME.

Si la raison de b *à* d *est la même que celle de* f *à* g, *celle de* d *à* b *est la même que de* g *à* f. 52.

Ce troisiéme Axiome n'est pas moins certain que le premier & le second. *Contenir* & être *contenu* sont des termes réciproques : ainsi il est évident que si *b* contient *d* comme *f* contient *g*, alors *d* est contenu dans *b*, comme *g* est contenu dans *f*.

Quand on tire une conséquence de cet Axiome, cela s'appelle conclure *invertendo*.

QUATRIEME AXIOME.

Le premier Antécédent est au second Antécédent, comme le premier Conséquent au second Conséquent. 53.

Ainsi si *A*. B :: C. D; donc *A*. C :: *B*. D. laquelle maniere de conclure s'appelle *Alternando*. On compare alternativement *A* avec C, l'Antécédent avec l'Antécédent ; & B avec D le Conséquent avec le Conséquent. Ce que nous appellons ici *Alternando*, d'autres l'appellent *Permutando*.

Nous avons vû dans la Section précédente, S. n. 13. l'importance qu'il y a de réduire, autant que cela se peut, plusieurs & différentes Grandeurs aux mêmes signes ou mêmes noms ; de sorte que dans la maniere qu'on les exprime on apperçoive ce qu'elles ont de commun, & ce qu'elles ont de particulier. On le peut faire ici de même.

Les lettres marquent toutes sortes de Grandeurs ; ainsi une Raison étant proposée telle qu'elle soit, sourde ou non, je puis appeller b *l'Antécédent de cette Raison, &* d *le Conséquent ; je*

puis diviser b *par* d, *ou* d *par* b. *Or si je nomme* q, *le quotient de* d *divisé par* b, *qui est le signe de la maniere que* b *est contenu dans* d: *donc puisque le quotient d'une division multipliant le diviseur, ici* q *multipliant* b, *doit faire, Liv. I. n. 21. une grandeur égale à la grandeur divisée, il faut que* qb *soit égal à* d. *Ainsi je puis nommer* qb *la grandeur* d, *& réduire ces deux termes* b *&* d *à ceux-ci* b, qb, *quoique je ne connoisse point leur valeur, & même qu'elle ne se puisse pas exprimer par nombres; & qu'ainsi leur raison soit sourde; car* q *ne marque autre chose que la maniere dont* b *est dans* d, *sans la determiner. C'est le quotient de* d *divisé par* b, *qui ne dit point si* b *peut diviser exactement* d *ou non. Il est certain par les Axiomes qu'on vient de proposer, que les raisons égales ont des exposans egaux, les exposans sont les quotiens: par conséquent lorsque deux raisons sont égales, que* b *est à* d *comme* f *est à* g, *si le quotient de* d *divisé par* b *est* q, *celui de* g *divisé par* f *doit être le meme; ainsi* g *doit être égal à.* qf. *On peut donc réduire cette proportion* b. d :: f. g. *à celle-ci,* b. qb :: f. qf. *C'est ce que je dis en moins de paroles dans le Lemme suivant, & son Corollaire.*

LEMME.

54. *Le plus grand terme d'une Raison est égal au plus petit multiplié par le quotient de la division du plus grand par le plus petit.*

Soient *b* & *d* les deux termes d'une raison, *b* est le plus petit terme. Ayant divisé *d* par *b*, je nomme *q* le quotient de cette division. Ce quotient *q* multipliant le diviseur *b*, le produit *qb* sera égal à *d*, la grandeur divisée, Liv. I. n. 21. Ainsi *qb* = *d*; ce qu'il falloit prouver.

Je supposerai toujours, pour abréger, que c'est le Conséquent qui est le plus grand terme. Si d *avoit été plus petit que* b, *la même démonstration fait voir que* qd=b.

C O R O L L A I R E.

On peut donc exprimer les termes d'une Raison, & même tous ceux d'une Progression, de la maniere suivante. 55.

J'appellerai toujours q le quotient du conséquent divisé par l'antécédent. Si ces termes sont donc b & d, je pourrai mettre qb au lieu de d. Je pourrai aussi exprimer tous les termes d'une progression de cette même maniere, & changer par exemple cette progression $\div b.c.d.f.g.h.k.$ en celle-ci $\div b.\ qb.\ qqb.\ q^3b.\ q^4b.\ q^5b.\ q^6b.$, qui est la même; car par le Lemme précédent $qb=c$, & multipliant qb par le quotient de la raison de c à d, qui est toujours le même, sçavoir q, il faudra que $q^2b=d$, ainsi que $q^3b=f$, & que $q^4b=g$, &c.

P R E M I E R E P R O P O S I T I O N.

Premier Théorême.

Deux grandeurs sont égales, lorsqu'elles ont même raison à une troisieme grandeur. 56.

Soit $b.g :: b.f.$ c'est-à-dire que g & f ont une même raison avec b, je dis que $g=f$. Ayant divisé g par b, & f par le même b, puisque les raisons de b à g & de b à f sont égales, ces deux divisions auront un même exposant, ou même quotient, selon le premier Axiome. Je nomme q ce quotient, donc par le Lemme précédent,

$qb = \left\{ \begin{matrix} g \\ f \end{matrix} \right.$ Ainsi les grandeurs g & f étant égales à une même grandeur, sçavoir à qb, elles sont égales entr'elles ; ce qu'il falloit démontrer.

SECONDE PROPOSITION.

Second Théorême.

57. *Deux raisons égales à une troisieme Raison, sont égales entr'elles.*

La raison de b à d est égale à celle de x à z, à laquelle celle de f à g est aussi égale. $b. d :: x. z.$ & $f. g. :: x. z.$ Il faut démontrer que $b. d :: f. g.$ Par l'hypothese, selon le premier Axiome, l'exposant de la raison de b à d, ou ce qui est la même chose le quotient de d divisé par b, est le même que celui de z divisé par x, puisque ces deux Raisons sont égales. Ainsi si le quotient de la Raison de b à d est q, celui de la Raison de x à z fera aussi q. Or puisque f est à g, comme x est à z, & que le quotient de x à z est q, donc celui de f divisé par g sera aussi q. Puis donc que ces deux raisons ont un même quotient, sçavoir q, elles ont un même exposant : donc, selon l'Axiome, elles sont égales ; ce qu'il falloit prouver.

TROISIÉME PROPOSITION.

Troisiéme Théorême.

58. *Deux grandeurs demeurent en même Raison, quoiqu'on ajoute à l'une & à l'autre, pourvû que ce qu'on ajoute à la premiere soit à ce qu'on ajoute à la seconde, comme la premiere est à la seconde.*

Soient donnés d'une part b & d, & de l'autre f & g, on ajoute f à b, ce qui fait $b+f$, & g à d, ce qui fait $d+g$; si $b.\ d :: f.\ g$, je dis que $b+f.\ d+g :: b.\ d$; ce qu'il faut démontrer.

Soit q l'exposant de la raison de b à d, qui sera aussi celui de la raison de f à g, puisque ces raisons sont égales. Donc par le Corollaire du Lemme ci-dessus, je puis exprimer ainsi ces quatre grandeurs $b.\ d.\ f.\ g.$ les réduisant à celle-ci $b.\ qb.\ f.\ qf$; ainsi ajoutant f à b & qf à qb, il faut démontrer que $b+f.\ qb+qf :: b.\ d.$ Pour cela je divise le premier conséquent $qb+qf$ par le premier antécédent $b+f$, le quotient de cette division est q, selon ce qui a été enseigné touchant cette Opération dans le premier Livre, que pour diviser par exemple $qb+qf$ par $b+f$, il n'y avoit qu'à supprimer les lettres communes au diviseur, & à la grandeur qui doit être divisée, sçavoir ici $b+f$, après quoi il ne reste que q. Or par l'hypothese le quotient de d divisé par b est aussi q ; donc par le second Axiome la raison de $b+f$ à $qb+qf$, ou de $b+f$ à $d+g$, est égale à celle de b à d, qui est ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Lorsque deux raisons sont égales, l'antécédent de l'une, plus son conséquent, est à ce même conséquent, comme l'antécédent de l'autre plus son conséquent est à ce conséquent. 59.

Ce Corollaire, à quelque petit changement près, n'est, s'il faut ainsi dire, qu'une expression particuliere de la proposition précédente. Car soit $b.\ d :: f.\ g$; pour démontrer que $b+d.\ d :: f+g.\ g.$ il n'y a qu'à faire *alternando* $b.\ f :: d.\ g.$ Mais par ce Théorême $b+d.\ f+g :: b.\ f$; & partant $b+d.$

$f+g$ :: $d.g$. Donc encore *alternando* $b+d$. d :: $f+g$. g ; ce qu'il falloit démontrer.

Quand on compare ainsi les antécédens plus leurs conséquens avec ces mêmes conséquens, cela s'appelle composer. Et quand on en tire quelque conséquence, on dit qu'on conclut *componendo*.

QUATRIEME PROPOSITION.

Quatriéme Théorême.

60. *Deux grandeurs demeurent en même Raison, quoiqu'on retranche de l'une & de l'autre, pourvû que ce qu'on retranche de la premiere soit à ce qu'on retranche de la seconde, comme la premiere est à la seconde.*

Soit $b.d$ :: $f.g$, on retranche f de b, ce qu'on marque ainsi $b-f$, & g de d ; ce qui se marque de même $d-g$; il faut démontrer que $b-f$, $d-g$ :: $b.d$. Soit divisé le conséquent d par son antécédent b, je suppose que le quotient est q ; divisant g par f, cette division aura le même quotient q, puisqu'on suppose que la raison de f à g est égale à celle de b à d. Je puis donc, par le Corollaire du dernier Lemme, §. n. 54 substituer qb en la place de d, & qf en la place de g ; ainsi il faut démontrer que $b-f$, $bq-qf$ :: $b.d$. On a supposé que le quotient de d divisé par b est q. Or divisant le conséquent $qb-qf$ par l'antécédent $b-f$, le quotient est le même, sçavoir q : donc par le second Axiome ci-dessus,

$b-f$. $qb-qf$ :: $b.d$: ou, $q-f$. $d-g$ :: $b.d$.

COROLLAIRE.

61. *Lorsque deux Raisons sont égales, le premier*

antécédent moins le premier conséquent, est à ce conséquent, comme le second antécédent moins le second conséquent, est à ce second conséquent.

Soit *b. d* :: *f. g.* il faut prouver que *b—d. d* :: *f—g. g.* Premierement *alternando b, f* :: *d. g.* Donc ôtant des termes *b* & *f* les termes *b* & *g.* qui sont en même raison, on aura par cette quatriéme Proposition *b—d. f—g* :: *b. f.* Or la raison de *b* à *f* est la même que celle de *d* à *g.* Ainsi *b—d. f—g* :: *d. g.* Donc *alternando b—d. d* :: *f—g. g*; ce qu'il falloit prouver.

Quand on tire une conséquence de cette vérité, on appelle cela conclure *dividendo*. Il me semble qu'on auroit dû dire *subtrahendo*; car c'est une soustraction.

CINQUIEME PROPOSITION.

Cinquiéme Théoréme.

Lorsque deux Raisons sont égales, le premier antecedent est au premier antécédent, moins le premier conséquent, comme le second antécédent est au second antécédent, moins le second conséquent. 62.

Si *a. b* :: *c. d*, il faut que *a. a—b* :: *c. c—d*; car *alternando a. c* :: *b. d*: donc s. n. 60. *a—b. c—d* :: *a. c*, ou, ce qui est la même chose, *a. c* :: *a—b. c—d.* Or *alternando a. a—b* :: *c. c—d*; & c'est ce qu'il falloit prouver. Quand on tire une conséquence de cette vérité, cela s'appelle conclure *convertendo.*

Sixieme Proposition.

Sixiéme Théorême.

83. *Lorsque deux grandeurs sont multipliées par une même grandeur ; étant multipliées, elles sont en même raison qu'avant que d'être multipliées.*

Soient les grandeurs *b* & *d* multipliées par *x*, il faut démontrer que *xb*. *xd* :: *b*. *d*. Ayant divisé le conséquent *d* par l'antécédent *b*, soit nommé le quotient de cette division *q* ; ainsi *qb*=*d*, & par conséquent *xqb*=*xd*. Il faut donc démontrer que *xb*. *xqb* :: *b*. *d*. Par l'hypothese le quotient de la division de *d* par *b* est *q*. Or divisant le conséquent *xqb* par l'antécédent *xb*, le quotient est encore *q*, selon ce qui a été enseigné en parlant de la division ; par conséquent, par le second Axiome ci-dessus, les deux raisons proposées ayant le même quotient, elles sont les mêmes.

xb. *xqb* :: *b*. *d* ; ou *xb*. *xd* :: *b*. *d*.

ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

84. *Le multiplicateur est au produit de la multiplication, comme l'unité à la grandeur à multiplier : pareillement le nombre à multiplier est au produit de la multiplication, comme l'unité au multiplicateur.*

Soit le nombre 6 à multiplier par le multiplicateur 3, en multipliant 1 & 6 par 3, l'on a le multiplicateur 3, & le produit 18, qui sont en même raison, s. n. 63, que 1 à 6. Ainsi 1. 6 :: 3. 18 *alternando* 1. 3 :: 6. 18.

Donc le multiplicateur est au produit de la mul-

tiplication, comme l'unité à la grandeur à multiplier; & le nombre à multiplier est au produit de la multiplication, comme l'unité est au multiplicateur.

De même si b est multiplié par d, dont bd est le produit, on aura $1.\ b :: d.\ db$.

Alternando $1.\ d :: b.\ db$.

Septieme Proposition.

Septiéme Théorême.

Divisant deux grandeurs par une troisiéme, les quotiens de ces divisions seront en même raison que ces grandeurs. 65.

Soient deux grandeurs b & d, je les divise par x, le quotient de b par x soit nommé p, & celui de d par x soit nommé q, il faut prouver que $p.\ q :: b.\ d$. Or $px = b$, & $qx = d$; s. n. 55 : donc $px.\ qx :: b.\ d$. Or $p.$ & $q.$ ayant été multipliés par x; selon la Proposition précédente, $xp.\ xq :: p.\ q$: donc par la seconde ci-dessus, puisque les raisons de b à d, & de p à q, sont égales à une troisiéme raison, qui est celle de xp à xq, il faut que $p.\ q :: b\ d$; ce qu'il falloit demontrer.

Corollaire.

Le diviseur est à la grandeur à diviser comme l'unité est au quotient; ou comme l'unité est au quotient aussi le diviseur est au nombre à diviser; 66.

Soit 18 à diviser par le diviseur 6, le quotient est 3. Or c'est la même chose que si on proposoit de diviser 6 & 18 par 6, dont les quotiens sont 1 & 3, qui par le Théorême sont entr'eux comme 6 & 18; qui est ce qu'il falloit prouver.

$1.\ 3 :: 6.\ 18.$

HUITIEME PROPOSITION.

Huitiéme Théorême.

67. *Lorsque quatre grandeurs sont en Proportion Géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Soient ces quatre grandeurs $b. d. :: f. g$, dont b & g sont les extrêmes, & d & f les moyens, il faut démontrer que $bg = df$. Ayant nommé q le quotient de la raison de b à d, celui de la raison de f à g sera aussi q : donc, $\bar{s}$. n. 54. je puis nommer qb la grandeur d, & qf la grandeur g ; ainsi il faut démontrer que $bqf = dqf$; ce qui est évident, puisque ce sont les mêmes grandeurs. Voici encore une autre démonstration.

Multipliant les deux derniers termes f & g par le premier qui est b, par la sixiéme Proposition $bf. bg :: f. g.$ & par la même Proposition multipliant b & d par f qui est le second antécédent, $fb. fd :: b. d$; & par conséquent $bg.$ & fd ayant même raison avec un troisiéme, sçavoir bf ou fb. par la premiere Proposition, ces deux produits sont égaux ; ce qu'il falloit démontrer.

$$bf. \left\{ \begin{array}{l} bg. :: f. g. \\ fd. :: b. d. \end{array} \right.$$

COROLLAIRE.

68. *Trois grandeurs étant en proportion continuë, le terme moyen multiplié par lui-même ; ou le quarré de ce terme est égal au produit ou plan fait des deux extrêmes.*

Soient $\div b. c. d.$ Je dis que $cc = bd$; car $b. c :: c. d$; donc $bd = cc$, par le présent Théorême.

NEUVIEME

NEUVIEME PROPOSITION.

Neuviéme Théorême.

Lorsque quatre grandeurs sont tellement disposées, que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens : ces quatre grandeurs sont proportionnelles. 69.

Soient ces quatre Grandeurs b, d, f, g. Si df produit des moyens d & f est égal à bg produit des extrêmes b & g, je dis que $b.d::f.g$. je multiplie f & g par b, par la 6^e Proposition $bf.bg::f.g$. Je multiplie b & d par f: ainsi par la même Proposition $bf.fd::b.d$. Or puisque fd. & bg sont deux produits égaux, $\overline{s}$. n. 56. l'on a $bf. \left\{ \begin{array}{l} fd::b.d. \\ bg::f.g. \end{array} \right.$ car la raison de bf à fd est la même que celle de bf à bg : donc, $\overline{s}$. n. 57. la raison de b à d est la même que celle de f à g ; ainsi $b.d::f.g$: ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE PREMIER.

Donc si $ab^2c—abc^2 = a^2bc—ab^2c$; il faut que les grandeurs bc & $ab—ac$ qui ont produit $ab^2c—abc^2$ soient ou extrêmes ou moyens d'une proportion : de même ab & $ac—bc$, qui ont produit $a^2bc—ab^2c$, sont aussi extrêmes ou moyens. 70.

COROLLAIRE SECOND.

Tout changement qui n'empêche point que de quatre grandeurs, les mêmes soient ou extrêmes ou moyens, ne trouble point leur proportion. 71.

Soit $b.d::f.g$. Quelque changement qui arrive, pourvû que b & g soient ou les deux moyens, ou les

deux extrêmes, & que *d* & *f* soient aussi ou les deux moyens ou les deux extrêmes; de sorte que le produit $bg = df$, ces quatre termes seront proportionnels. Or en transposant les raisons, comme lorsque de *b. d* :: *f. g*, on fait *f. g* :: *b. d*, les moyens deviennent les extrêmes, & les extrêmes les moyens; ainsi la proportion n'est point troublée, puisque $df = bg$.

De même en changeant la disposition des termes de chaque raison, de sorte que le conséquent prenne la place de l'antécédent, & l'antécédent celle du conséquent, comme si de *b. d* :: *f. g*, on fait *d. b* :: *g. f.* par ce changement les extrêmes deviennent les moyens, par conséquent $bg = df$; ainsi la proportion demeure. En prenant les termes d'une proportion alternativement, c'est-à-dire, en comparant les antécédens ensemble, & les conséquens ensemble; comme si de *b. d* :: *f. g*, on fait *b. f* :: *d. g*, alors *b* & *g* demeurent les extrêmes, & *f* & *d* les moyens; la proportion demeure donc, puisque $bg = fd$.

On tire souvent des conséquences de ces changemens, & ces conséquences sont bonnes, parce que la proportion demeure toujours, quoique changée, comme on l'a vû dans ce Corollaire. Voici plus expressément & en peu de mots toutes les différentes manieres dont on peut tirer ces sortes de conséquences.

1°. *Si* a. b :: c. d, *la conséquence est bonne* invertendo, *b. a* :: *b. c.*

2°. *Si* a. b :: c. d, *la conséquence est bonne* alternando *ou* permutando *a. c* :: *b. d.*

3°. *Si* a. b :: c. d, *la conséquence est bonne* a+b. b :: c+d. d; *ce qui se nomme* componendo.

4°. *Si* a. b :: c. d, *la conséquence est bonne* a—b. b :: c—d. d; *ce qui s'appelle* dividendo.

5°. *Si* a. b :: c. d, *la conséquence est bonne* convertendo *a. a—b :: c. c—d.*

Cela a été démontré ci-dessus. On peut encore conclure en la même maniere, ou tirer des conséquences des deux Propositions suivantes qu'on va démontrer:

DIXIEME PROPOSITION.

Dixiéme Théorême.

S'il y a deux suites de grandeurs a, b, e *&* c, d, f, *telles que* a. b :: c. d, *&* b. e :: d. f, *on peut conclure, donc* a. e :: c. f. *Cela s'appelle concluire* ex proportione ordinata. 72.

Selon cette supposition que *a. b :: c. d*, & que *b. e :: d. f*, donc s. n. 67. *ad = bc* & *bf = ed* : Ainsi comme *ac* & *bc* sont des grandeurs égales de même que *ed* & *bf*: donc *ad. ed :: bc. bf.* Or *ad. ed :: a. e*, s. n. 63. & *bc. bf :: c. f*: donc *a. e :: c. f*; ce qu'il falloit démontrer.

ONZIEME PROPOSITION.

Onziéme Théorême.

S'il y a deux suites de grandeurs a, b, e *&* c, d, f; *telles que* a. b :: d. f, *&* b. e :: c. d, *on peut conclure : donc* a. e :: c. f; *cela s'appelle conclure* ex proportione perturbatâ. 73.

Par l'hypothese, *a. b :: d. f*, & *b. e :: c. d.* Donc *af = bd.* & *ec = bd.* Donc *af = ec.* Mais puisque *af* & *ec* sont deux grandeurs égales, s. n. 56. elles auront même raison à une même grandeur *ef*: ainsi *af. ef :: ec. ef.* Or s. n. 63. *af. ef : a. e*; & *ec. ef : : c. f.* Donc *a. e :: c. f*; ce qu'il falloit prouver.

DOUZIEME PROPOSITION.

Douziéme Théorême.

74. *Les quotiens d'une même grandeur divisée par differens diviseurs sont réciproquement entr'eux comme les diviseurs.*

Soit a divisé par b, dont le quotient soit nommé p; ainsi $\frac{a}{b}=p$. Soit aussi a divisé par c dont le quotient soit nommé q; ainsi $\frac{a}{c}=q$. Il faut prouver que p est à q réciproquement, comme b est à c, & par conséquent que $p.\ q :: c.\ b$.

Puisque le quotient multiplié par le diviseur, fait un produit égal à la grandeur divisée : donc $pb=a$, & $qc=a$: donc $pb=a=qc$: donc $pb=qc$; donc s. n. 69. $p.\ q :: cb$; ce qu'il falloit démontrer.

TREIZIEME PROPOSITION.

Treiziéme Théorême.

75. *Dans une proportion de plusieurs termes, comme l'un des antécedens est à son conséquent; ainsi la somme de tous les antécedens sera à celle de tous les conséquens.*

Soit $b.\ c :: d.\ f. :: g.\ h$. Il faut démontrer que $b+d+g$ somme des antécédens, est à $c+f+h$ somme des conséquens, comme b est à c, ou d à f, ou g à h, puisque $b.\ c :: d.\ f$. Donc

Alternando b. d :: c. f.

Componendo b+d. d :: c+f. f.

Alternando b+d. c+f :: d. f.

Par l'hypothese $d. f :: g. h.$
Donc $b+d. c+f. :: g. h.$
Alternando $b+d. g :: c+f. h.$
Componendo $b+d+g. g :: c+f+h. h.$
Alternando $b+d+g. c+f+h :: g. h$; qui est ce qu'il falloit démontrer, puisque la raison de g à h est la même que celle de b à c, & de d à f.

Quatorzieme Proposition.

Quatorziéme Théorême.

Si l'on multiplie par ordre les termes de deux proportions, les produits seront aussi en proportion. 76.

Soit $a. b :: c. d$, & $e. f :: g. h$. Je dis que $ae. bf :: cg. dh$; car, s. n. 67. $ad = bc$, & $eh = fg$; & multipliant ad & bc grandeurs égales par les grandeurs égales eh & fg, elles resteront égales. Ainsi $adeh = bcfg$, ou $aedh = bfcg$; donc par la neuviéme Proposition, ae, $bf :: cg. dh$.

Corollaire.

1°. *Si l'on divise les termes d'une proportion par les termes d'une autre, les quotiens seront aussi en proportion.* 77.

Car $\frac{ae}{e} . \frac{bf}{f} :: \frac{cg}{g} . \frac{dh}{h}$ devient $a. b :: c. d.$

2°. *Les puissances quelconques d'une proportion sont aussi en proportion.*

Si $a. b :: c. d.$ en multipliant les termes de cette proportion par eux-mêmes, l'on aura $aa. bb :: cc. dd$; multipliant encore celle ci par la premiere, l'on aura $a^3. b^3 :: c^3. d^3.$

3°. Les racines quelconques des termes d'une proportion, sont aussi en proportion.

Si a. b :: c. d, $\sqrt{a}$. $\sqrt{b}$ :: $\sqrt{c}$. $\sqrt{d}$. &c.

CHAPITRE V.

Usage des Proportions dans les Regles de Trois, de Compagnie & de Fausse position.

QUINZIEME PROPOSITION.

Problême Premier.

78. *Les trois premiers termes d'une Proportion étant connus, connoître le quatriéme.*

Soient donnés *b*, *c*, *d*, les trois premiers termes d'une proportion Géométrique, on cherche le quatriéme.

Il faut multiplier le second & le troisiéme l'un par l'autre, ce qui fait *cd*, & diviser ce produit par le premier terme *b*. Je suppose que le quotient de cette division soit *f*, je dis que *f* sera le quatriéme terme qu'on cherche, & je le démontre.

Le quotient *f* de *cd*, divisé par *b*, étant multiplié par *b*, fait un produit égal à *cd*. Liv. I. n. 21. Ainsi $bf = cd$; donc ces quatre termes *b*, *c*, *d*, *f*, font une proportion *b*. *c* :: *d*. *f*, s. n. 69. Le quatrieme terme de cette proportion se connoît ainsi.

Si on me donnoit donc ces trois nombres 8, 12 & 10, & qu'on demandât un quatriéme terme qui fût à 10, comme 12 est à 8, je multiplierois le second terme 12 par le troisiéme qui est 10, ce qui fait 120, lequel produit je diviserois par le premier terme 8. Le quotient de cette division qui est 15, seroit à 10 comme 12 est à 8.

COROLLAIRE.

Soit b. c :: d. f. *Voilà ce qui doit arriver, ſelon ce Problême.* 79.

1°. *c*, le ſecond terme ayant été multiplié par le troiſiéme *d*, & le produit *cd* ayant été diviſé par le quatriéme *f*, le quotient de la diviſion ſera le premier terme ; car, ſ. n. 71. *f. d* :: *c. b.* puiſque ce changement ne trouble point la proportion. Ainſi on peut prendre le dernier conſéquent pour le premier antécédent, & alors *b*, qui étoit le premier terme, ſera le quatriéme terme.

2°. *b*, premier terme ayant été multiplié par *f* quatriéme terme, & le produit *bf* ayant été diviſé par *d* troiſiéme terme, le quotient de cette diviſion ſera égal à *c* ſecond terme : car, ſ. n. 71. *d. b* :: *f. c*, où *c* eſt le quatriéme terme.

3°. Le troiſiéme terme *d* eſt égal au produit du premier *b*, par le quatriéme *f* diviſé par le ſecond *c* ; car *c. b* :: *f. d* ; & alors *d* eſt le quatriéme terme.

4°. Si la proportion eſt renverſée, c'eſt-à-dire, qu'au lieu de cette diſpoſition *b. c* :: *d. f*, ces termes ayent celle-ci *b. c* :: *f. d*, dans laquelle le quatriéme *d* eſt d'autant plus petit que le troiſiéme *f*, que le ſecond *c* eſt plus grand que le premier *b* ; alors le quatriéme terme *d* eſt égal à *bf* produit du premier *b* par le troiſiéme *f* diviſé par le ſecond qui eſt *c* ; car ces termes étant diſpoſés comme dans une proportion droite, ils peuvent être ainſi placés, *c. b* :: *f. d.* Or, ſelon la propoſition précédente, n. 78. le produit de *fb* diviſé par *c*, eſt égal à *d* ; donc, &c.

DE LA REGLE DE TROIS DROITE, ET INVERSE.

20. Ce dernier Corollaire enseigne la pratique de la Regle qu'on appelle communément Regle de Trois, & à laquelle quelques-uns, à cause du grand usage qu'on en fait, ont donné le nom de Regle d'Or. La Regle de Trois est Droite ou Inverse. Par la Regle de Trois Droite, on cherche le quatrieme terme d'une proportion dont les termes sont ordonnés proportionnellement, c'est-à-dire, que le quatriéme est au troisiéme ce que le second est au premier. Par la Regle de Trois Inverse, on trouve le quatriéme terme d'une proportion où l'ordre proportionnel des termes est renversé, de sorte que d'autant que le second terme est plus grand ou plus petit que le premier; le quatriéme au contraire est plus petit ou plus grand que le troisiéme. Dans la Regle de Trois Droite on raisonne du plus au plus, ou du moins au moins; dans l'Inverse on raisonne du plus au moins, ou du moins au plus; ainsi il est évident qu'on renverse la raison.

QUESTION SUR LA REGLE DE TROIS DROITE.

Un homme dépense en 6 jours 24 pistoles. On demande combien en 30 jours il dépensera de pistoles, faisant toujours les mêmes dépenses.

Dans cette question on cherche un quatriéme terme qui soit à 30, comme 24 est à 26. On connoit les trois premiers termes de cette proportion. Pour trouver le quatriéme, il faut, selon la proposition précédente, multiplier 30 par 24, & diviser leur produit 720 par le premier terme

qui est 6 ; le quotient de cette division 120 sera le quatriéme terme, & le nombre de pistoles que dépensera cet homme en trente jours.

Toute la pratique de cette Regle consiste à ranger les termes connus & donnés, ensorte qu'ils soient proportionnels les uns aux autres, & que l'inconnu se trouve le quatriéme terme de la proportion ; car on peut proposer cette question, de maniere que les termes ne soient pas rangés dans une proportion droite. Comme si, par exemple, on disoit : un homme a dépensé 24 pistoles en six jours ; en trente jours combien dépensera-t-il ? Il faut que les choses de même espéce soient ou les *antécédens* ou les *conséquens* de la proportion. Si on a mis les jours pour premier antécédent, il faut que les jours soient le second antécédent ; ce qui est évident, lorsque l'on a conçu ce que c'est que proportion. Il faut aussi tâcher de donner aux mêmes choses les mémes noms. On pourroit proposer cette même question ainsi, demandant : Si un homme en six jours dépense 24 pistoles, combien dans un mois dépensera-t-il d'écus ? Ces nombres 6 jours, 24 pistoles, un mois, & les écus qu'il faut trouver, sont quatre termes qui ont chacun leur nom en particulier, comme s'ils marquoient quatre choses différentes, ce qui peut causer de la confusion. Pour l'éviter, il faut donner à la même quantité les mêmes noms. Par exemple, ayant appellé le premier tems jours, il faut appeller le second tems des jours ; & ayant parlé de pistoles, il faut continuer à exprimer la quantité de l'argent par le même nom de pistoles ; après il faut placer ces noms de sorte qu'ils se répondent. Au lieu donc de dire un mois, il faut dire 30 jours : au lieu de dire combien dèpensera-t-on d'écus ? Il faut dire, combien dépensera-t-on de

piſtoles ? Ce ſont des petites difficultés qui ne peuvent arrêter ceux qui ont une notion diſtincte des proportions.

DE LA REGLE DE TROIS INVERSE.

81. On ſe ſert de cette Regle, lorſqu'on cherche un quatriéme terme plus petit que le troiſiéme, à proportion que le ſecond terme eſt plus grand que le premier; ou qui ſoit plus grand que le troiſiéme, à proportion que le ſecond eſt plus petit que le premier.

QUESTION SUR LA REGLE DE TROIS INVERSE.

A préſent que le ſeptier de bled coûte 16 livres; pour une certaine monnoye j'ai ſix livres de pain; lorſque la même meſure de bled ne vaudra que 8 livres, combien aurai-je de livres de pain pour la même monnoye?

Les termes donnés 16, 6, 8, ne ſont point rangés proportionnellement. Le nombre propoſé des livres de pain qu'on cherche, doit être d'autant plus grand que celui qui eſt connu, ſçavoir 6 livres de pain, que 16 livres prix du ſeptier de bled dans un certain tems eſt plus grand que 8, prix d'un ſeptier de bled dans un autre tems; ainſi le troiſiéme terme devroit être le premier. C'eſt pourquoi faiſant le contraire de ce qu'on a fait dans la Regle de Trois Droite, il faut multiplier le premier terme par le ſecond, 16 par 6, ce qui fait 96, & diviſer le produit 96 par le troiſiéme qui eſt 8, le quotient de cette diviſion 12, eſt le quatriéme terme. Ainſi cette Regle eſt aſſez inutile; car quand on connoît bien la nature des proportions, on peut arranger les termes d'une Queſtion, de ſorte qu'ils faſſent une proportion droite dont on trouve le

quatriéme terme par une Regle de Trois Droite. Les termes de cette Queſtion pouvoient ſe ranger en cette maniere.

8. bled, 16 bled :: 6 pain, 12 pain.

SEIZIEME PROPOSITION.

Problême ſecond.

Diviſer une grandeur proportionnellement aux parties données d'une autre grandeur. 82.

*a*9. eſt un nombre dont les parties ſont *b*4, *c*2, *d*3.

*A*27 eſt un ſecond nombre qu'on veut partager en trois parties, *B*, *C*, *D*, proportionnelles à celle de *a*; de ſorte que

$$a9.\ A27 :: \begin{cases} b4.\ B12. \\ c2.\ C6. \\ d3.\ D9. \end{cases}$$

Il faut chercher la valeur de *B*, de *C*, & de *D*; qui ſont les quatriémes termes de cette proportion, par trois opérations différentes.

1°. La valeur de *B*, multipliant *b* par *A*, & diviſant le produit par *a*, le quotient de cette diviſion, qui eſt 12, ſera la valeur de *B*.

2°. Il faut multiplier *c* par *A*, & en diviſer le produit par *a*, le quotient de la diviſion qui eſt 6, ſera la valeur de C.

3°. Multipliant *d* par *A*, & diviſant leur produit par *a*, le quotient 9 ſera la valeur de D. Or il n'y a pas de doute que *B*, *C*, *D*, ne ſoient les parties de *A*; car par l'hypotheſe de *a*. *A* :: *b*. *B* :: *c*. C :: *d*. D. Donc, ſ. n. 75.

$a+b+c+d.\ A+B+C+D :: a.\ A.$ Donc *alternando*

$a+b+c+d.\ a :: A+B+C+D.\ A.$ Donc *dividendo*.

$a+b+c+d-a. a :: A+B+C+D-A. A$;
ou, ce qui est la même chose :

$b+c+d. a :: B+C+D. A.$

Or $b+c+d=a$ par l'hypothese : Donc $B.+C+D=A$; ce qu'il falloit démontrer.

DE LA REGLE DE COMPAGNIE.

33. La Regle de Compagnie est une pratique de la Proposition précédente. Lorsque plusieurs Marchands sont entrés dans une société, & qu'ils ont fourni diverses sommes d'argent, avec lesquelles ils ont fait un certain gain ; on voit par cette Regle de Compagnie combien ils doivent gagner à proportion des sommes qu'ils ont contribuées, ou de quelle maniere il faut partager le gain proportionnellement aux sommes particulieres que chaque Marchand de cette Compagnie a contribuées, divisant, par le moyen de la Proposition précédente, tout le gain proportionnellement aux parties de la remise totale.

QUESTION.

Trois Marchands ont fait une bourse de 10000 *livres : le premier a mis* 2000 *liv. le second* 5000 *l. le troisiéme* 3000 *liv. ils ont gagné* 4000 *liv. On demande comment on pourra partager le gain qu'ils ont fait, proportionnellement aux sommes qu'ils ont avancées.*

Selon ce qui a été enseigné dans la premiere Proposition, il faut mettre au premier terme d'une Regle de Trois l'addition des trois sommes contribuées, qui est 10000 livres; au second, le gain qui est 4000 livres; au troisiéme la somme que chaque Marchand a avancée, & puis chercher le

quatriémes termes proportionnels, qui se trouveront être pour le premier 800 livres, pour le second 2000 livres, pour le troisiéme 1200 livres. Ces trois sommes sont les parties du gain 4000 livres, divisées en parties proportionnelles à la mise totale 10000 livres.

10000 l. 4000 l. :: { 2000 l. 800 l.
5000 l, 2000 l.
3000 l. 1200 l.

DE LA REGLE DE FAUSSE POSITION.

Lorsqu'on sçait la proportion que les parties 84.
inconnues d'un nombre proposé ont ensemble, on suppose un nombre autre que le proposé, dont les parties sont en même proportion que celles du proposé, & par les nombres supposés & connus, on connoît ceux qu'on cherche.

On appelle cette Regle, la Regle *de Fausse Position*, parce qu'on suppose un nombre, avec lequel on raisonne, comme si c'étoit le véritable nombre, quoiqu'il ne le soit pas. Il y a deux Regles de Fausse position; la premiere est d'une Fausse position; la seconde est de deux Fausses positions. Nous parlerons de cette derniere ailleurs.

QUESTION SUR LA REGLE DE FAUSSE POSITION.

On sçait que les trois âges de trois personnes font ensemble 144 ans; que l'âge de la seconde est double de l'âge de la premiere, & l'âge de la troisieme triple de l'âge de la seconde. On demande quel est l'âge d'un chacun.

Je fais cette supposition, que le premier est âgé de 3 ans; par conséquent, selon la Question, l'âge

de la seconde personne doit être 6, double de 3; l'âge de la derniere est triple de la seconde; il doit donc être de 18. Or ces trois âges 3, 6, 18, ne font que 27, par conséquent ma supposition est fausse : car les trois âges, selon la question, doivent faire 144 ans. Mais puisque je sçai que les parties de 144 sont proportionnelles aux parties de 27, qui sont 3, 6, 18, par la Proposition précédente, je partage 144 en parties proportionnelles à celles de 27, comme il a été enseigné ci-dessus, n. 82.

$$27.\ 144 :: \begin{cases} 3. & 16. \\ 6. & 32. \\ 18. & 96. \end{cases}$$

Ainsi la premiere personne aura 16 ans, la seconde 32, & la troisieme 96.

CHAPITRE VI.

Des Progressions Géométriques.

DIX-SEPTIEME PROPOSITION.

Théorême quinziéme.

85. *Dans une Progression Géométrique, le produit de deux termes également éloignés des Extrêmes, est égal au produit des Extrêmes.*

Soit cette progression ∺ *b. c. d. e. f. g. h.* &c. il faut prouver que $cg = bb$, ou $df = bb$. Par la Définition des progressions $b.\ c :: g\ h$. Donc 5. n. 67. $bb = cg$. & puisque $b.\ d :: f.\ h$. Donc $bb = df$, &c.

COROLLAIRE.

Le produit ou plan fait de deux termes d'une progreſſion, eſt égal au quarré d'un troiſieme terme moyen entre ces deux termes. 86.

Ainſi $ce = dd$ & $df = ee$; car $c. d. :: d. e$; &, $d. e :: e. f$, &c.

DIX-HUITIEME PROPOSITION.

Théorême ſeiziéme.

Dans une progreſſion le ſecond terme eſt égal au premier multiplié par la premiere puiſſance de l'expoſant de la raiſon qui regne dans cette progreſſion ; le troiſieme au premier multiplié par la ſeconde puiſſance de cet expoſant ; le quatrieme au premier par la troiſiéme puiſſance de cet expoſant. Ainſi de ſuite. 87.

Ce Théorême n'eſt qu'une ſuite du Lemme propoſé, ſ. n. 54. & la même choſe que ce qui eſt contenu dans le Corollaire qui ſuit, ſ. n. 55, mais exprimée d'une autre maniere. Soit donc cette progreſſion $\div b. c. d. f. g. h.$ &c. ſuppoſant que l'expoſant de la raiſon de b à c eſt q, c'eſt-à-dire que c diviſé par b, le quotient de cette diviſion eſt q. Donc $qb = c$. Et puiſque le quotient de d diviſé par c ou qb, eſt encore q. Donc qc ou qqb eſt égal à d. Ainſi on réduira cette progreſſion à celle-ci, qui eſt la même.

$$\div b. bq. q^2b. q^3b. q^4b. q^5b. \text{ \&c.}$$

Où vous voyez à l'œil que le ſecond terme eſt égal à b le premier terme, multiplié par la premiere puiſſance de l'expoſant q, le troiſiéme au premier b multiplié par la ſeconde puiſſance de q. Ainſi de ſuite.

DIX-NEUVIEME PROPOSITION.

Problême Troisiéme.

88. *Continuer une progression dont on connoît les trois premiers termes, ou deux seulement, avec l'exposant de leur raison.*

Soient ces trois termes $\div\, b.\, c.\, d.$ Multipliant c par d, & divisant le produit par b, le quotient $\frac{cd}{b}$ sera le quatrieme terme, s. n. 78. $b.\, c. :: d. \frac{cd}{b}$

Or puisque $\div\, c.\, d.\, \frac{cd}{b}$, c'est-à-dire que ces trois termes sont les trois premiers termes d'une proportion, on leur trouvera de la même maniere un quatriéme; ainsi on pourra augmenter à l'infini cette progression.

Si l'on sçait que l'exposant de la raison qui regne dans cette progression est q, c'est-à-dire que q est le quotient de c divisé par b, par la Proposition précédente, le troisiéme terme sera q^2b, le quatrieme q^3b, le cinquiéme q^4b; ainsi de suite.

VINGTIÉME PROPOSITION.

Problême quatriéme.

89. *Trouver quelque terme que ce soit d'une progression, dont on connoît le premier terme avec l'exposant de la raison qu'il a avec le second terme.*

Le premier terme d'une progression est 5, l'exposant de la raison qu'il a avec le second terme est 10; je veux trouver le huitiéme terme. Pour cela je prends la septiéme puissance de 10, multipliant 10 six fois par lui-même; ce qui se fait en ajou-

tant 6 zéro après 10. Je multiplie donc par la septiéme puissance de 10 qui est 10000000, le premier terme 5, ce qui fait 50000000, qui sera le huitiéme terme que l'on cherche, s. n. 87. car il est fait du premier terme multiplié par la septiéme puissance de l'exposant de sa raison avec le second terme.

PREMIERE QUESTION.

Un Marchand vend un très-beau Cheval, à condition que du premier clou de ses fers on donnera un denier ; du second clou on donnera 10 deniers ; du troisiéme 100, & il y en a 20 : on demande combien le vingtiéme clou doit être payé.

Pour trouver ce prix, il faut ajouter 18 zéro après 10 ; de sorte que ce dernier clou vaudroit 10000000000000000000 deniers ; ce qui fait une somme prodigieuse : tous les Princes du monde ne seroient pas assez riches pour acheter ce cheval à cette condition.

SECONDE QUESTION.

Jacob entra en Egypte avec 70 personnes. On suppose que sa famille après 20 ans fut deux fois aussi grande ; que 20 ans ensuite elle s'augmenta encore deux fois autant, en même proportion, ainsi de suite. On demande combien elle fut augmentée 200 ans après.

On cherche le dixiéme terme d'une progression, dont le premier terme est 70, pour cela j'éleve 2, exposant de la raison qui regne dans cette progression, à la neuviéme puissance, multipliant 2 huit fois par lui-même, ce qui fait 512, par laquelle puissance je multiplie le premier terme

70. Le produit est 35840. Ainsi les dernieres 20 années du second siecle après que Jacob entra en Egypte, sa famille s'augmenta de ce nombre.

VINGT-UNIÉME PROPOSITION.

Théorême dix-septiéme.

90. *Dans une progression Géométrique, le second terme moins le premier est au premier, comme le dernier moins le premier, est à la somme de tous les termes qui le précédent.*

Soit ∺ $b. c. d. f. g. h.$ Dans une progression; comme dans toutes les autres, chaque conséquent peut être pris pour antécédent du terme suivant, ainsi on peut exprimer cette progression en cette maniere :

$$b. c :: c. d :: d. f :: f. g :: g. h.$$

Or comme le premier terme b est au second c, ainsi $b+c+d+f+g$, somme de tous les antécédens, est à $c+d+f+g+h$, somme de tous les conséquens, s. n. 75.

$$b. c ∺ b+c+d+f+g. c+d+f+g+h.$$

Invertendo,

$$c. b :: c+d+f+g+h. b+c+d+f+g.$$

Dividendo,

$$c-b. b :: c+d+f+g+h-b-c-d-f-g. b+c+d+f+g.$$

Or puisque $+c+d+f+g-c-d-f-g=0$; donc $c+d+f+g+h-b-c-d-f-g=h-b$, & par conséquent $c-b. b :: h-b. b+c+d+f+g$: c'est-à-dire que le second terme c moins le premier b, est à b, comme le dernier h, moins le premier b, est à la somme de tous ceux qui le précédent; qui est ce qu'il falloit prouver.

Remarquez que ce que nous venons de démontrer du ſecond & du premier terme, par rapport au dernier & à la ſomme de ceux qui le précédent, ſe doit entendre de quels autres deux termes que ce ſoit, pourvû qu'ils ſe ſuivent l'un l'autre. C'eſt ce que nous allons encore démontrer dans le Corollaire qui ſuit.

1. Corollaire.

Dans une progreſſion, lorſque deux termes ſe ſuivent immédiatement, celui qui ſuit, moins celui qui précéde, eſt à celui qui précéde, comme le dernier terme, moins le premier, eſt à la ſomme de tous ceux qui précédent. 91.

Ainſi dans l'exemple propoſé nommant *ſ* la ſomme de tous les termes qui précédent *b* : je dis que *d—c. c* :: *b—b. ſ*. De même auſſi *b—g. g* :: *b—b. ſ*, & ainſi des autres ; ce qui eſt évident. Car une progreſſion Géométrique n'eſt qu'une continuation de la même raiſon. Donc *b. c* :: *c. d*, & de même *b*, *c* :: *g. b*. Mais *invertendo*, *c. b* :: , *d. c* ; & *c. b* :: *b. g. dividendo*, *c—b. b* :: *d—c. c* ; &, *c—b. b* :: *b—g. g*. Or par cette Propoſition *c—b. b* :: *b—b. ſ*. Donc *d—c. c* :: *b—b. ſ* ; &, *b—g. g* :: *b—b. ſ*. Ce qu'il falloit démontrer.

2. Corollaire.

1°. *Si la raiſon double regne dans une progreſſion, le dernier terme que je nomme* x, *moins le premier terme, eſt égal à la ſomme de tous les termes qui le précedent.* 92.

Soit nommée *ſ* la ſomme de tous les termes qui précédent *x* le dernier terme, je nomme *a* le premier terme. Si c'eſt la raiſon double qui regne dans

cette progression, le premier terme étant a, le second sera $2a$. Or par la Proposition présente, $2a - a . a :: x - 1 . f$. Donc puisque $2a - a$ est égal à a; il faut que $x - a$ soit égal à f: c'est-à-dire que le dernier terme de la progression, moins le premier, est égal à la somme de tous les termes qui le précedent; ce qu'on avoit proposé.

2°. *Si la raison triple regne, le dernier terme* x, *moins le premier, est le doubl. de* f, *somme de ceux qui le precedent.*

Car si a est le premier, le second sera $3a$. Or par la Proposition présente, $3a - a . a :: x - a . f$. Partant puisque $3a - a$ est le double de a; donc $x - a$ sera le double de f: ce qu'on avoit proposé.

3°. *Si la raison quadruple regne, le dernier terme de* x, *moins le premier, est triple de* f, *somme de ceux qui le précédent.*

Car si le premier est a, le second sera $4a$. Or, par la Proposition présente $4a - a . a :: x - a . f$. Donc $4a - a$ étant le triple de a, il faut que $x - a$ soit le triple de f.

Ainsi de toutes les autres progressions qui ont par conséquent des propriétés particulieres, selon les différentes Raisons qui y regnent, lesquelles nous découvrons toutes par ce seul Corollaire.

93. *On appelle progression Multiple celle dont le second terme est plus grand que le premier; & Sous-multiple celle dont le premier terme est plus grand que le second; de sorte que la progression va toujours en diminuant, comme celle-ci* ÷ 16. 8. 4. 2. 1. *&c. ce qui peut aller à l'infini, puisque l'esprit ne trouve aucune borne dans la divisibilité des Grandeurs, comme nous le démontrerons dans la Proposition suivante. Mais supposant qu'enfin on puisse arriver à une fin, c'est-à-dire à une Grandeur si petite qu'elle ne puisse être divisée, & qu'elle soit*

preſque égale à zero. Puiſqu'il eſt évident qu'une progreſſion Multiple peut être changée en Sous-multiple, & une Sous-multiple en Multiple, n'y ayant qu'à la retourner : nous pouvons donc regarder le premier terme de cette progreſſion qui eſt 16, comme le dernier ; & alors, ſelon le Corollaire précédent, 16 moins le premier terme qui eſt zéro, eſt égal à tous les termes qui le précedent, quelque leur nombre ſoit indéfini. Ce qui nous fait appercevoir la ſolution du Sophiſme de Zénon.

Suppoſant, diſoit ce Philoſophe, qu'Achille aille dix fois plus vite qu'une tortue, ſi la tortue a une lieue d'avance, jamais Achille ne l'attrapera ; car tandis qu'Achille ſera la premiere lieue, la tortue ſera la dixiéme de la ſeconde lieue : & tandis qu'Achille ſera la dixiéme de la ſeconde lieue, la tortue ſera la dixiéme de cette dixiéme, & ainſi à l'infini.

Zénon ſuppoſoit que toutes ces dixiémes de dixiémes à l'infini faiſoient un eſpace infini de lieues, qui pourtant ne ſont toutes enſemble qu'une neuviéme de lieue : car puiſque la raiſon Décuple regne dans cette progreſſion, le dernier terme qui eſt une lieue moins le premier qui eſt preſque zéro, ſera neuf fois plus grand que ceux qui le précédent, c'eſt-à-dire que toutes ces dixiémes de dixiémes. Dans cette progreſſion ſous-multiple, une lieue eſt le premier terme ; mais, comme nous avons dit, en changeant cette progreſſion ſous-multiple en une multiple, une lieue eſt le dernier terme qui moins le premier zéro, ſera neuf fois plus grande que toutes ces dixiemes de dixiemes de lieues, par le Corollaire précédent : ainſi toutes ces dixiémes de dixiémes, pour grande qu'on conçoive la progreſſion, ne vaudront jamais qu'une neuviéme de lieue.

VINGT-DEUXIEME PROPOSITITION.

Théorême dix-huitiéme.

94. *Le nombre des termes d'une progression Géométrique se peut augmenter en montant & en descendant.*

Soit cette progression ⩨ a,b,c. On peut s, n. 88. trouver en montant un quatriéme terme, proportionnel à ces trois qui sont donnés, & ensuite un cinquiéme, un sixiéme à l'infini ; il n'y a pas de difficulté à cela. On le peut de même en descendant : car soit a ce premier terme de la progression qui monte, & le dernier de celle qui descend, je suppose que la raison Décuple regne dans l'une & dans l'autre. En divisant a en 10 parties, & appellant x une de ces dixiémes, cet x sera le second terme en descendant ; & divisant de même x en dix parties, & nommant z cette dixiéme, z sera le troisiéme terme en descendant. Continuant à diviser par dixieme, je dis que l'on n'arrivera point à zéro. Car soit nommé y le dernier terme de la progression, quel qu'il soit, zéro ou un nombre réel. Ainsi $y \ldots\ldots z, x, a$, ⩨ Soit aussi nommée f la somme de tous les termes de la progression. Alors $a—y$, c'est-à-dire a moins la dixiéme partie du terme qui est avant y, vaudra $9f$, s. n. 93. Donc y n'est pas zéro, mais quelque chose qui le peut encore diviser. La même chose se peut dire de tout autre terme plus éloigné que y. Ainsi on n'arrivera jamais à zéro.

VINGT-TROISIEME PROPOSITION.

Théorême dix-neuviéme.

La somme d'une progression infinie peut être égale à un nombre fini. 95.

Car soit une progression infinie en descendant, dans laquelle regne la raison double, Le premier terme est 2 : le second 1, qui est la moitié de 2 ; le troisieme $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire la moitié de 1 ; le quatriéme $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire la moitié de la moitié, & ainsi à l'infini : de sorte que comme ces termes vont en diminuant, on peut supposer que le dernier terme est zéro. Ainsi $\div$ 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. .... & partant, $\overline{\text{s}}$. n. 90. $\div$ 0..... $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$. 1. 2. Or., $\overline{\text{s}}$. n. 91. ce dernier terme 2, moins le premier, qui est zéro, est égal à la somme de tous les termes précédens ; partant toute cette suite infinie de moitiés de moitiés, est égale à 2, ainsi à un nombre fini.

VINGT-QUATRIEME PROPOSITION.

Problême cinquiéme.

Trouver la somme d'une progression dont on connoît le premier & le second terme avec le dernier. 96.

Je nomme le premier a, le second b, & le dernier x, & f la somme de ceux qui précedent le dernier. b—a. a :: x—a. f, $\overline{\text{s}}$. n. 90. On trouvera la valeur de f multipliant le dernier terme x, après en avoir retranché le premier a, par le

premier, qui est a, & divisant ce produit par le second terme, après en avoir retranché le premier, c'est-à-dire par b—a. Le quotient sera la valeur de s, qui étant ajoutée au dernier x qu'on suppose connu; on aura la somme de toute la progression; puisque s est la valeur de tous les termes qui précédent x, qui est le dernier terme.

PREMIERE QUESTION.

Une personne la premiere année a dépensé 10 pistoles, la seconde année 15, & la derniere année de sa vie 10010. On demande combien elle a dépensé de pistoles avant sa mort?

Selon cette derniere Proposition, le second terme 15, moins le premier 10, est au premier 10, comme 10010 moins le premier 10 est à la somme des termes qui le précédent.

15—10. 10 :: 10010—10. s.

Pour avoir donc la somme que l'on cherche, je multiplie 10010—10, c'est à-dire 10000, par 10, le produit est 100000, que je divise par 15—10, c'est-à-dire par 5, le quotient de la division est 20000, que j'ajoute à 10010, ce qui fait 30010, qui est le nombre des pistoles que cette personne a dépensées.

SECONDE QUESTION.

Supposons que la famille de Jacob 20 ans après son entrée dans l'Egypte, fût deux fois aussi grande que lorsqu'elle y entra; & qu'ainsi Jacob y étant entré avec 70 personnes, après 20 ans sa famille fût de 140, augmentant toujours dans la même proportion, & qu'enfin les vingt dernieres années du second siecle après son entrée, elle se trouva être

au

au nombre de 35840. On demande de combien elle fut augmentée dans tout cet espace de deux ans.

Cette Question se réduit à trouver la somme d'une progression, dont le premier terme est 70, le second 140, & le dernier 35840. Or puisque ce dernier terme moins le premier 70, est égal à tous les termes qui le précédent, s. n. 92. il faut ajouter à 35840 le même nombre 35840 moins 70, c'est-à-dire, 35770 avec 35840, ce qui fait 71610.

Nous avons supposé qu'au bout de 20 ans cette famille fut plus grande deux fois, que lorsqu'elle entra dans l'Egypte. Mais elle ne fut pas seulement augmentée du double; car Jacob avoit plusieurs enfans, qui, étant tous mariés, eurent des enfans de leurs femmes pendant ces vingt premieres années. Ainsi 200 ans après, cette famille étoit bien plus que de 71610.

VINGT-CINQUIEME PROPOSITION.

Problême sixiéme.

Le premier, le dernier terme, & le nombre des termes d'une progression étant donnés, en trouver l'exposant. 97.

Soit une progression dont 70 est le premier terme, & 35840 le dernier terme, qui est le dixiéme. On veut trouver l'Exposant de la raison qui regne dans cette progression. Ce dernier terme est fait du premier terme 70, multiplié par la neuviéme puissance de l'Exposant que l'on cherche, s. n. 87. Divisant donc 35840 par 70, le quotient, qui sera 512, sera la neuviéme puissance de l'exposant; laquelle étant extraite de ce nombre 512, selon la méthode que nous en avons don-

née, Liv. 2. n. 49. il se trouve que l'exposant que l'on cherchoit est 2.

Vingt-sixieme Proposition.

Problême septiéme.

98. *Le premier terme, l'exposant & le dernier terme étant donnés, trouver le nombre des termes.*

Le premier terme est 70, l'exposant est 2, le dernier terme 35840. Par la 18ᵉ Proposition, ce dernier terme n'est autre chose que le premier multiplié par une certaine puissance de l'exposant, égale, c'est-à-dire, de même nom que le nombre des termes qui précédent ce dernier 35840. Ainsi il n'y a là qu'à diviser 35840 par 70, le quotient est 512. Ensuite il faut élever l'exposant 2 de puissance en puissance, jusqu'à ce qu'on ait un produit égal à 512, quotient de la susdite division. Or 2 élévé jusqu'à sa neuvieme puissance donne 512. Donc 35840 est le dixiéme terme, fait du premier 70, multiplié par 512, neuviéme puissance de l'exposant 2 : Ainsi la progression a dix termes.

Question.

On sçait qu'une personne la premiere année dépensa 6 pistoles, la seconde trois fois davantage, & qu'elle dépensa 486 la derniere année. On demande pendant combien d'années elle fit cette dépense.

Le premier terme de cette progression est 6 pistoles, l'exposant de la raison qui regne dans cette progression est 3, & le dernier terme est 486. Je divise 486 par le premier terme 6, le quotient de cette division est 81, qui étant la qua-

triéme puissance de 3, il faut que 486 soit le cinquiéme terme, & que par conséquent cette progression ait 5 termes.

VINGT-SEPTIEME PROPOSITION.

Problême huitiéme.

L'exposant, le nombre des termes, le dernier terme étant donnés, trouver le premier terme de la progression. 99.

L'exposant d'une progression est 3, le dernier terme est 486 : il y a cinq termes. Le terme 486 est fait du premier terme multiplié par la quatriéme puissance de l'exposant, s. n. 87. Donc en divisant 486 par 81, quatriéme puissance de 3, le quotient qui est 6, sera le premier terme de cette progression que je cherchois.

VINGT-HUITIEME PROPOSITION.

Problême neuviéme.

L'exposant, le nombre des termes étant donnés avec la somme de la progression, trouver chacun des termes. 100.

L'exposant d'une progression de six termes est 3, la somme de cette progression est 728, il faut trouver chaque terme de cette progression. Pour cela je prens une progression connue où regne la raison triple, comme est celle-ci qui a six termes ∺ 1. 3. 9. 27. 81. 243. la somme de cette progression est 364. En divisant 728 en parties proportionnelles à celle de 364, s. n. 82. l'on trouvera tous les termes que l'on cherche, qui seront ∺ 6. 18. 54. 162. 486. car ces termes doivent être tous proportionnels à ceux de l'autre progression.

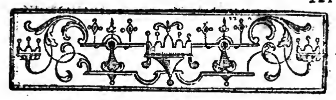
VINGT-NEUVIÉME PROPOSITION.

Problême dixiéme.

101. *Le premier terme d'une progreſſion, l'expoſant de la raiſon qui y regne, & la ſomme de la progreſſion étant donnés, trouver combien cette progreſſion a de termes, & la valeur du dernier terme.*

Le premier terme d'une progreſſion eſt 2, l'expoſant de la raiſon qui y regne eſt 3, & 728 eſt la ſomme de tous les termes de la progreſſion. Cette ſomme contient le dernier terme, plus tous ceux qui le précédent. Or ce dernier terme moins le premier qui eſt 2, eſt le double de tous ceux qui le précédent, ſ. n. 92. Donc ayant ôté de 728 le premier terme qui eſt 2, & diviſé le reſte 726 en deux parties, telle que l'une ſoit le double de l'autre, qui ſeront 242 & 484, ſ. n. 84. ayant ajouté à 484, le premier terme 2, ce qui fait 486; ce nombre ſera le dernier terme, après quoi on trouvera quel eſt le nombre des termes de cette progreſſion, ſ. n. 98.

Cette réſolution paroît particuliere à cet exemple, mais elle ne l'eſt pas. Quand on connoît la raiſon qui regne dans une progreſſion, on peut, ſ. n. 92. *connoître la raiſon que le dernier terme moins le premier a avec tous les termes qui le précédent; ainſi on réſoudra en la même maniere de ce dixiéme Problême, quelqu'autre exemple qu'on propoſe. Cependant nous en donnerons une réſolution plus générale dans le VII Livre, connoiſſant le premier & le ſecond terme avec la ſomme de la progreſſion, mais ſans faire aucune attention à la raiſon qui y regne.*



ELEMENS DES MATHEMATIQUES, OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GÉNÉRAL.

LIVRE QUATRIEME.

Des Raisons composées, que les Puissances & toutes les Grandeurs de plusieurs Dimensions peuvent avoir entr'elles.

SECTION PREMIERE.

Des Raisons composées, & de leurs propriétés.

CHAPITRE PREMIER.

On peut nombrer les raisons, & faire par elles toutes les opérations de l'Arithmétique, aussibien que par les nombres.

NOUS n'avons proprement considéré dans le Livre précédent, où nous avons parlé des Raisons, que ce qu'une grandeur est par rapport 1.

à d'autres Grandeurs avec qui on la compare. Examinons maintenant les raisons ou rapports d'une maniere absolue, c'est-à-dire, considérons les raisons en elles-mêmes comme des Grandeurs absolues. Considérons, par exemple, la Raison double, la Raison triple, & toutes les autres Raisons. J'apperçois que les Raisons ainsi considérées peuvent être nombrées ; qu'elles sont capables des Opérations de l'Arithmétique ; qu'on peut ajouter une Raison avec une autre Raison ; par exemple, une Raison double avec une autre Raison, ou double, ou triple, &c. Qu'on peut ôter une Raison double d'une Raison triple, qu'on peut prendre la raison double tant de fois, par exemple trois fois, & la multiplier ainsi par 3, ce qui fait une Raison sextuple ; ou diviser une Raison sextuple par 3, de laquelle division le quotient est une Raison double. Raison n'est qu'une maniere de contenir ou d'être contenu ; ainsi je puis regarder cette maniere comme une grandeur, puisqu'elle est capable d'être diminuée & d'être augmentée. Les nombres, si nous considérons bien leur nature, ne sont que des rapports ou raisons. Quand on dit que cette tour a cent pieds de haut, que celle-ci n'en a que quatre-vingt, on compare ces deux tours : on considere le rapport ou la raison qu'elles ont avec un pied, & ensuite on dit que l'une est plus grande, ayant cent parties telles que la plus petite n'en a que quatre-vingt, de sorte que ces mots *cent*, *quatre-vingt*, ne marquent qu'un certain rapport. Lorsqu'on entreprend de nombrer, l'on convient premierement d'une commune mesure ; & on commence par une partie qui est commune aux choses qu'on veut nombrer. Dans l'exemple des deux tours, on convient d'une certaine mesure,

qui eſt la grandeur d'un pied. Il faut auſſi, en nombrant les Raiſons, les réduire premierement, de maniere qu'elles ayent un terme connu, qui ſoit comme leur commune meſure. Nous allons voir que cela ſe peut faire ; après quoi les Opérations de l'Arithmétique ſe font ſur les Raiſons avec la même facilité que ſur les nombres. Ainſi on concevra clairement qu'on peut compoſer une Raiſon de pluſieurs Raiſons, comme on peut compoſer un nombre de pluſieurs autres nombres par l'addition ou par la multiplication.

On pourroit faire les mêmes réflexions ſur *les Différences*, conſidérant qu'*une Différence* peut être compoſée de pluſieurs *Différences*. Il eſt bien évident que l'excès ou le défaut de deux Grandeurs qu'on compare enſemble, peuvent être nombrés, ajoutés, ſouſtraits les uns des autres, ſe multiplier & diviſer. On peut dire que la différence de 10 à 15, a cinq fois la différence de 9 à 10 : qu'ôtant la différence de 14 à 15, de la différence de 11 à 15, on a la différence de 9 à 12. Cela eſt trop clair pour s'y arrêter, & on ne tireroit aucune utilité d'un plus long diſcours ſur cette matiere.

Pour donner une idée encore plus claire de ce que c'eſt que Raiſon compoſée, il faut conſidérer qu'on peut rappeller toutes les Raiſons à une commune meſure, c'eſt-à-dire, les exprimer de maniere qu'on les puiſſe comparer avec une même Grandeur, & par ce moyen connoître ce qu'elles ſont les unes au regard des autres. Cela ſe fait en leur donnant un même conſéquent, ſi elles en ont de différens ; car par exemple, dans les deux Raiſons de 3 à 12, & de 4 à 12, où les deux antécédens 3 & 4 ont pour conſéquent un même nombre qui eſt 12, on voit clairement le rapport de ces deux Raiſons : que celle de 3 à 12 eſt quadruple,

que celle de 4 à 12 est triple, & qu'ainsi la Raison de 3 à 12 est à celle de 4 à 12, comme 3 à 4. Or pour donner un même conséquent à deux Raisons, à celle de *b* à *c*, & à celle de *f* à *g*, je multiplie les termes de la premiere par le conséquent de la derniere, c'est-à-dire *b* & *c* par *g*, ce qui fait *bg*, *cg*, qui sont en même Raison que *b* & *c*, Liv. III. n. 63. Je multiplie de même les termes de la seconde Raison par le conséquent de la premiere Raison, c'est-à-dire *f* & *g* par *c*, ce qui fait *cf* & *cg*, qui est, selon ce qu'on vient de dire, une même Raison que celle de *f* à *g*.

$$\begin{matrix} b. & c. \\ f. & g. \end{matrix} :: \left.\begin{matrix} bg. \\ cf. \end{matrix}\right\} cg$$

Ces deux Raisons *b. c*, & *f g.* étant ainsi reduites à celles-ci de *bg* à *cg*, & de *cf* à *cg*, elles ont un même conséquent, sçavoir, *cg*.

Soient ces deux Raisons en nombre, 3. 7, & 5. 11. Il les faut réduire, de sorte que ces deux Raisons n'ayent qu'un même conséquent, afin qu'on connoisse mieux le rapport qu'elles ont entr'elles. Je multiplie donc 1°. 3 & 7 par 11, ce qui fait 33 & 77. 2°. Je multiplie 5 & 11 par 7, ce qui fait 35 & 77; ainsi les deux raisons de 3 à 7, de 5 à 11, sont réduites à celles-ci, qui ont un même conséquent. $\left.\begin{matrix} 33 \\ 35 \end{matrix}\right\} 77$
On voit que ces deux raisons proposées sont comme ces nombres 33 & 35; après quoi opérant sur ces exposans, les ajoutant, les multipliant, on est censé ajouter, multiplier ces raisons; ce que je remarque pour faire comprendre comment les opérations de l'Arithmétique se peuvent faire sur les raisons; car il n'est pas nécessaire pour cela de les réduire, de maniere qu'elles ayent un même

conséquent. Comprenons seulement ici qu'il n'est pas plus difficile de faire les opérations de l'Arithmétique sur les raisons que sur les nombres, qui ne sont eux-mêmes, comme je l'ai dit, que des raisons. S'il faut ajouter une raison triple avec une raison double, j'ajoute 2 & 3, qui sont leurs exposans; ce qui fait 5, exposant de la raison quintuple. S'il faut ôter la raison double de la raison triple, j'ôte 2 de 3, & il reste 1, exposant de la raison d'égalité. S'il faut mulitiplier la raison triple par la raison double, je multiplie 2 & 3 leurs exposans, l'un par l'autre, le produit est 6, qui est l'exposant de la raison sextuple. Ainsi le produit de la raison double, multipliée par la raison triple, est la raison sextuple. On voit de même que la raison sextuple étant divisée par la raison triple, le quotient de cette division est une raison double.

Ce que je dis des raisons qui ont pour exposant des nombres, convient aux raisons sourdes, dont on peut trouver les exposans, comme nous avons vû, & ensuite opérer sur ces exposans : car, comme on l'a démontré, deux raisons, quelles qu'elles soient, se peuvent réduire, de maniere qu'elles n'ayent qu'un même conséquent, & alors leurs antécédens sont leurs exposans, sur lesquels on peut faire les opérations d'Arithmétique, comme sur les nombres absolus qui sont comme les antécédens de plusieurs raisons, qui ont toutes un même conséquent; sçavoir l'unité. En chemin faisant nous pouvons démontrer cette Proposition.

Deux raisons sont entr'elles comme le produit des Extrêmes est au produit des moyens, c'est-à-dire, *comme le produit du premier antécédent par le second conséquent est au produit du second antécédent par le premier conséquent.*

Soient ces deux raisons de *b* à *c*, & de *f* à *g*, elles se réduisent à celles-ci. La raison de *b* à *c* à celle de *bg* à *cg*, & celle de *f* à *g* à celle de *cf* à *cg*. Ces raisons ayant un même conséquent, sçavoir *cg*, elles sont entr'elles comme *bg* est à *cf*, qui est ce que dit cette Proposition; car *bg* est le produit des extrêmes, & *cf* celui des moyens.

cg
cf } *cg*

Je n'ai parlé ici des opérations Arithmétiques sur les raisons, que pour faire comprendre ce que nous allons dire des raisons composées dans ce quatriéme Livre; car le Livre suivant est entierement employé à parler de ces opérations.

CHAPITRE II.

Ce que c'est que Raison composée.

Définitions & Axiômes touchant les Raisons composées.

2. CE mot *composer* est équivoque, aussi-bien que ce mot *raison composée*: car comme une Grandeur peut être composée en deux manieres, de deux ou de plusieurs Grandeurs; sçavoir, ou par l'addition, ou par la multiplication de ces Grandeurs; aussi une raison sera composée de plusieurs autres raisons, ou parce qu'elle est égale à la somme de ces raisons, comme la raison quintuple est égale à la raison double jointe à la triple, ou parce qu'elle est faite par la multiplication de ces raisons; comme la raison sextuple est faite de la raison double multipliée par la triple.

L'usage l'a ainsi voulu, que lorsque l'on dit

qu'une raison est composée de deux raisons, que par exemple la raison de deux plans est composée de celle de leurs deux racines, on entend que ces deux raisons étant multipliées l'une par l'autre, elles font la raison des deux plans, comme on le démontrera. Ainsi l'usage ôte l'équivoque de ce mot, *raison composée.*

PREMIERE DEFINITION.

Une raison est composée lorsqu'elle est faite de deux ou de plusieurs Raisons multipliées les unes par les autres. 3.

Ainsi la raison sextuple est appellée composée, lorsqu'on considere que cette raison est faite de la raison double multipliée par la raison triple.

SECONDE DEFINITION.

On appelle Raisons composantes celles dont la multiplication a produit une Raison composée. 4.

Ainsi la raison triple & la raison double sont les raisons composantes de la raison sextuple, qui a été composée par la multiplication de ces deux Raisons.

TROISIEME DEFINITION.

Une Raison composée de deux raisons égales, s'appelle Raison doublée de chacune de ces Raisons. 5.

La raison de 2 à 8 est composée de deux raisons égales, de 2 à 4, & de 4 à 8. Cette raison de 2 à 8 est doublée.

QUATRIEME DEFINITION.

6. *Une raiſon compoſée de trois raiſons égales, s'appelle raiſon triplée de chacune de ces raiſons.*

CINQUIEME DEFINITION.

7. *Une raiſon compoſée de quatre raiſons égales, eſt une raiſon quadruplée ; ainſi de ſuite.*

Raiſon doublée n'eſt pas la même choſe qu'une raiſon double, ni une raiſon triplée n'eſt pas la même choſe qu'une raiſon triple, &c. Ce que vous remarquerez dans la ſuite.

AXIOME PREMIER.

8. *Des raiſons ſont cenſées être multipliées les unes par les autres, lorſque l'on multiplie leurs expoſans les uns par les autres.*

Cette Propoſition eſt évidente, aprés ce qu'on a remarqué ci-deſſus, que lorſqu'on a réduit des raiſons à un même conſéquent, & qu'ainſi on a trouvé des grandeurs qui expoſent les raiſons que ces raiſons ont les unes avec les autres, on peut faire ſur elles toutes les opérations de l'Arithmétique, comme ſur des Grandeurs abſolues.

AXIOME SECOND.

9. *Les raiſons compoſées ſont égales, lorſque les raiſons compoſantes ſont égales.*

Cela eſt évident, les Touts ſont égaux, qui ont des parties égales. Des nombres égaux ajoutés ou multipliés de la même maniere, ſont de ſommes égales, ou des produits égaux.

CHAPITRE III.

Théorêmes & Problèmes touchant les Raisons composées.

LEMME PREMIER.

PLusieurs Grandeurs étant de suite, la suivante étant plus grande que celle qui la précéde, l'exposant de la raison de la premiere à la seconde, multipliant celui de la raison de la seconde à la troisiéme, produit l'exposant de la raison de la premiere à la troisiéme; & cet exposant multipliant celui de la raison de la troisiéme à la quatriéme, produit celui de la raison de la premiere à la quatriéme; ainsi de suite. 101

Soient ces grandeurs de suite b, c, d, f, l'exposant de la raison de b à c soit nommé q, c'est-à-dire le quotient de c divisé par b. Celui de la raison de c à d soit nommé p, il faut prouver que pq sera l'exposant de la raison de b à d. Pour cela considérez que $qb = c$, Liv. 3. n. 54. Et puisque p est le quotient de d divisé par c ou par qb égal à c: donc $qpb = d$, Liv. III. n. 54. Or le quotient de qpb divisé par b est qp, partant qp est l'exposant de la raison de b à d, selon la Définition qui a été donnée de l'exposant d'une raison; ce qu'il falloit démontrer.

Soit nommé y l'exposant de la raison de d à f: donc $yqpb = f$. Or ayant divisé $yqpb$ par b, le quotient est yqp, qui est le produit des quotiens qp & y: donc l'exposant de la raison de b à f est fait par la multiplication des exposans des raisons des

Grandeurs interposées ; ce qu'il falloit prouver.

Lemme Second.

11. *Une raison est composée des raisons, dont les exposans, en se multipliant, sont son exposant.*

Soit cette raison de b à f, dont l'exposant soit qpy, fait de q exposant de la raison de b à c, & de p exposant de la raison de c à d ; & de y exposant de la raison de d à f ; je dis que la raison de b à f est composée de celles de b à c, de c à d, & de d à f : car par la définition une raison est composée, lorsqu'elle est faite de deux ou de plusieurs raisons multipliées les unes par les autres. Or par le premier Axiôme, s. n. 8. ces raisons se multiplient en multipliant leurs exposans. Donc, &c.

Premiere Proposition.

Premier Théorême.

12. *La raison d'une Grandeur à une autre Grandeur est composée des raisons des Grandeurs interposées.*

Soient ces Grandeurs b, c, d, f ; entre b & f sont interposées c, d. Il faut démontrer que la raison de b à f est composée de la raison de b à c, de celle de c à d, & de celle de d à f. Cela est, selon le second Lemme, si l'exposant de la raison de b à f est égal au produit des exposans de ces raisons ; or, selon ce que nous avons fait voir dans le premier Lemme, l'exposant de la raison de b à f est fait par la multiplication des exposans des raisons des Grandeurs interposées ; il leur est donc égal, & partant cette proposition est bien démontrée.

SECONDE PROPOSITION.

Second Théorême.

Dans une Progression Géométrique, la raison du premier terme au second est simple; du premier au troisiéme, doublée; du premier au quatriéme, triplée; ainsi de suite. 13.

Cette proposition peut être conçue en cette autre maniere.

Dans une Progression Géométrique, la raison de deux termes entre lesquels il y a deux intervalles, est doublée; s'il y a trois intervalles, triplée.

Cela est manifeste. La progression Géométrique est une continuation de la même raison; partant puisque la raison d'un terme à un autre est composée des raisons des termes interposés entre ces deux termes par la proposition précédente; & que la raison du premier terme au second & celle du second au troisiéme sont égales, il faut par la troisiéme Définition, que la raison du premier terme au troisiéme soit une raison doublée. Ainsi la raison du premier au quatriéme terme étant composée de trois raisons égales, est une raison triplée.

Cette même démonstration montre qu'entre deux termes d'une progression, tels qu'ils soient, s'il y a deux intervalles, la raison de l'un à l'autre est doublée, étant faite de deux raisons égales; s'il y a trois intervalles, triplée, étant faite de trois raisons égales, &c.

✿

TROISIEME PROPOSITION.

Troisiéme Théorême.

14\. *Plusieurs raisons étant données, si on multiplie les antécédens par les antécédens, & les conséquens par les conséquens, les deux produits de ces deux multiplications seront l'un à l'autre en raison composée de ces raisons.*

Soient d'une part *b* & *c*, de l'autre part *d* & *f*. Si on multiplie l'antécédent *b* par l'antécédent *d*, ce qui fait *bd*, & le conséquent *c* par le conséquent *f*, ce qui fait *cf*; je dis que la raison de ces deux produits *bd* & *cf* sera composée de la raison de *b* à *c*, & de celle de *d* à *f*.

Pour démontrer cette vérité, prenons une des deux racines du produit *bd*, ou *b*, ou *d*, & une autre des deux qui ont produit *cf*, ou *c*, ou *f*, prenant la plus petite ou la plus grande, de sorte que le produit des deux racines qu'on aura choisies soit plus grand ou plus petit que l'un de ces produits *bd* & *cf*, & qu'il se rencontre ainsi interposé entre deux: Je prens *c* & *d*, & multipliant ces deux racines l'une par l'autre, cela fait *cd*, que je suppose être entre *bd* & *cf*; ainsi voilà trois Grandeurs qui se suivent, *bd. cd. cf.* Selon ce qui a été démontré, *bd. cd.* : : *b. c.* & *cd. cf.* : : *d. f.* Liv. 3. n. 63.

Or, s. n. 12. la raison de *bd* à *cf* est composée de celle de *bd* à *cd*, & de celle de *cd* à *cf*. Donc elle est aussi composée de celle de *b* à *c*, & de celle de *d* à *f* qui sont les mêmes. Soit une troisiéme raison de *g* à *h*: je multiplie *bd* par *g*, & *cf* par *h*; donc, selon ce qu'on vient de dire, la raison de *bdg* à *cfh*, est composée de celles de *bd* à *cf*, & de *g* à *h*. Ainsi la raison de *bdg* à *cfh* est composée

de trois raisons, de b à c, de d à f, de g à h, &c. ce qu'il falloit démontrer.

QUATRIEME PROPOSITION.

Problême Premier.

Deux ou plusieurs raisons étant données, trouver la raison composée, dont elles sont les raisons composantes. 150

Soient les raisons de b à c, & de d à f, il faut trouver la raison composée, dont elles sont les composantes. Pour cela on doit multiplier les antécédens l'un par l'autre, & les conséquens l'un par l'autre ; la raison de ces produits qui seront bd & cf, est une raison composée de ces deux raisons, par la Proposition précédente. Si on avoit encore une troisiéme raison comme celle de g à h, les deux premieres ayant composé celle qui est entre bd & cf ; il ne faut plus que multiplier l'antécédent g par bd, ce qui fait bdg ; & le conséquent h par cf, ce qui fait cfh. Par la Proposition précédente, la raison de bdg à bfh est composée de celle de g à h, & de celle de bd à cf.

S'il y avoit une quatriéme raison que l'on voulût joindre avec celle-là, il faudroit multiplier bdg par l'antécédent de cette raison, & cfh, par le conséquent de cette quatriéme raison, la raison des produits seroit composée de quatre raisons données.

Ainsi on voit comment on peut trouver une raison composée de tant de raisons qu'on voudra, lorsque ces raisons seront données.

CHAPITRE IV.

16. *Des Regles de Trois & de Compagnie composées.*

1°. DE LA REGLE DE TROIS COMPOSÉE.

QUelquefois on cherche un quatriéme terme qui soit à une raison composée de plusieurs autres raisons, comme est un autre terme à une autre raison composée. Par exemple, dans cette Question. C'est la coutume de payer quatre écus pour des marchandises du poids de deux cens livres, qui ont été apportées de cent lieues. On demande combien on doit de port pour les marchandises qui pesent 300 livres, lorsqu'elles sont apportées de 400 lieues.

Il est manifeste que l'on cherche un quatriéme terme qui se nomme x, qui ne soit pas seulement proportionnel à la distance du chemin, mais ensemble au poids des marchandises. Ainsi, pour résoudre cette Question, & celles qui seront semblables, il faut trouver la raison composée de celle du poids au poids, & de celle de la distance à la distance. Selon l'hypothese, $\left.\begin{matrix}200\\100\end{matrix}\right\} 4 :: \left.\begin{matrix}300\\400\end{matrix}\right\} x.$ c'est-à-dire qu'on cherche la valeur d'une certaine somme d'argent, x qui soit au poids 300 livres, & à la distance 400 lieues, comme 4 écus est au poids de 200 livres, & à la distance de 100 lieues. Or la raison composée de ces deux raisons se trouve par la Proposition précédente, en multipliant les antécédens l'un par l'autre, & les conséquens l'un par l'autre, sçavoir 200 par 100, &

300 par 400 ; ce qui donne d'un côté 20000, & de l'autre 120000. Après cela on voit évidemment que le terme inconnu x est à 120000, comme 4 écus est à 20000.

20000. 4 :: 120000 x.

Ainsi pour achever la résolution de cette Question, puisque ces trois nombres 20000. 4. 120000. sont les trois premiers termes d'une proportion, je multiplie le troisiéme par le second, c'est à-dire, 120000 par 4, ce qui produit 480000, que je divise par le premier terme 20000, le quotient de cette division est 24, qui sera le quatriéme terme de cette proportion, & le nombre des écus qui doivent être payés pour le port de 300 livres apportées de 400 lieues, ce qu'on cherchoit. La valeur de x est ainsi 24.

On peut chercher un troisiéme terme qui soit à une raison composée de 3, de 4 raisons, comme un terme donné est à une autre raison composée d'autant de raisons.

Par la Proposition précédente, vous avez appris à trouver les raisons composées, dont les raisons composantes sont données; ainsi il n'est pas nécessaire que j'enseigne plus au long comment ces Questions peuvent être résolues.

Mais je ne veux pas oublier qu'on peut proposer des Questions dans lesquelles le terme inconnu soit à une raison composée, comme un terme donné est à une raison simple.

Par exemple, un Ouvrier ayant par un travail de deux jours gagné vingt écus; on demande combien ce même Ouvrier doit gagner pour avoir travaillé 20 jours, & outre cela pour avoir fourni un cheval pendant tout ce tems-là ?

Il faut premierement considérer combien cet

Ouvrier pour sa seule peine doit recevoir, qui sera 200 écus.

Après cela il faut sçavoir ce qu'on donne à un loueur de chevaux par chaque jour; si c'est l'ordinaire de lui payer 20 sols, cet Ouvrier, outre ces 200 écus, doit recevoir 20 livres.

De la regle de Compagnie composée.

17. Dans la Regle de Compagnie simple, on cherche un terme qui ait une raison donnée à un terme donné : mais dans celle qui est composée, on cherche un terme qui ait une raison donnée à une raison composée.

Quatre Marchands ont gagné en commun 240 livres, le premier avoit donné 20 écus pour 4 mois, le second 40 pour 5 mois, le troisiéme 60 pour 6 mois, le quatriéme 80 écus pour 7 mois : le gain d'un chacun doit être proportionné à la raison composée de celle de l'argent à l'argent, & de celle du tems au tems.

La premiere chose qu'on doit donc faire, c'est de trouver les raisons composées de ces raisons, & pour cela il faut multiplier l'argent d'un chacun par le tems durant lequel on a prêté son argent, ce qui produit ces quatre nombres 80, 200, 360, 560, chacun de ces nombres est à chaque autre, par exemple 80 à 200, en raison composée, de celle de 20 écus à 40 écus, & de celle de 4 mois à 5 mois, ainsi des autres.

Après cela j'ajoute ces quatre nombres dans une somme qui sera 1200. Or comme cette somme 1200 est à 240, qui est le gain général, ainsi 80 sera au gain particulier du premier, 200 au gain du second, 360 au gain du troisieme, 560 au gain du quatriéme. On trouvera tous ces gains particu-

liers par la Regle de Trois simple, multipliant le second terme de cette proportion par le troisiéme, & en divisant le produit par le premier, de laquelle division le quotient sera le quatriéme terme inconnu qu'on cherche.

Ces quatriémes termes ou ces quatre gains particuliers se trouvent être par cette opération 16 livres pour le gain du premier, 40 livres pour le gain du second, 72 livres pour le gain du troisiéme, & 112 livres pour le gain du quatriéme.

1200. 240 ::	{	80	16.
		200	40.
		360	72.
		560	112.

Lorsqu'on a bien compris une fois la Théorie de l'Arithmétique, les exemples ne sont pas nécessaires: ainsi je ne suis pas obligé de dire plus au long ce qu'il faudroit faire dans une Regle de Compagnie, où la grandeur des gains ou des pertes dépend, non-seulement d'une raison composée de deux raisons, mais de 3, de 4, &c. On voit bien qu'il faut premierement trouver ces raisons composées, & ensuite faire ce qui a été enseigné touchant la Regle de Compagnie simple dans le troisiéme Livre.

SECTION SECONDE.

Des Raisons qu'ont entr'elles les Puissances & les Grandeurs de plusieurs dimensions.

Proposition Cinquieme.

Théorême Quatriéme.

18. *Deux Grandeurs de plusieurs dimensions qui ont quelques-unes de leurs racines égales & les autres inégales, sont entr'elles comme les inégales.*

Soient ces deux Grandeurs *bc* & *dc*, qui ont une de leurs racines égales, sçavoir *c*; il faut prouver que *bc. dc* :: *b. d.* ce qui est manifeste; car, Liv. III. n. 63. les produits de deux Grandeurs qui ont été multipliées par une troisiéme Grandeur, sont entr'eux comme ces Grandeurs. Or les Grandeurs *bc* & *dc* sont produites par *b* & *d* multipliées par la même Grandeur *c*, partant *bc. dc* :: *b. d.* Soient ces deux Grandeurs *bbc* & *dbc*, je dis que *bbc. dbc* :: *b. d.* car ces Grandeurs *bbc* & *dbc* sont produites de la multiplication des Grandeurs *b* & *d* par une même Grandeur, sçavoir *bc*. Ainsi par la même Proposition *bbc. dcb* :: *b. d*; ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire I.

19. *Le produit de deux Grandeurs est un moyen proportionnel entre les quarrés de ces Grandeurs.*

Soient ces deux Grandeurs b & d, dont le produit est bd. Le quarré de b est bb, celui de d est dd, je dis que $\div\!\div$ $bb.\ bd.\ dd.$ ce que je prouve. Par la derniere Proposition $\left.\begin{matrix} bc.\ bd \\ bd.\ dd \end{matrix}\right\}$ :: $b.\ d.$ Donc $bb.\ bd :: bd.\ dd.$ Liv. III. n. 57. Donc $\div\!\div$ $bb.\ dd.$ qui est ce qu'il falloit prouver.

Corollaire II.

Le produit des racines quarrées de deux quarrés, est un moyen proportionnel entre ces quarrés. 20.

C'est-à-dire que $\div\!\div$ $bb.\ bd.\ dd.$ ce qui a été démontré ; car la racine de bb est b, celle de dd est d ; ainsi bd est le produit de ces racines. Ce Corollaire est le même que le précédent, énoncé d'une autre maniere.

Corollaire. III.

Deux cubes comme xxx & yyy *étant donnés, si on multiplie le quarré de la racine du premier par la racine cube du second, ce qui fait* xxy, & *le quarré de la racine du second par la racine cube du premier, ce qui fait* yyx, *je dis que ces deux produits seront moyens proportionnels entre les cubes donnés.* 21.

$\div\!\div$ xxx. xxy. yyx. yyy.

Par la derniere Proposition $\left\{\begin{matrix} xxx.\ xxy \\ xxy.\ yyx \\ yyx.\ yyy \end{matrix}\right\}$ :: $x.\ y$

Donc, Liv. III. n. 57.

$xxx.\ xxy :: xxy.\ yyx :: yyx.\ yyy.$

Donc $\div\!\div$ $xxx.\ xxy.\ yyx.\ yyy.$

Entre deux quarrés de quarrés, comme a^4 & b^4 *ces trois produits* a^3b, $aabb$, ab^3, *sont trois moyens* 22.

proportionnels. Entre a^3 & b^3, *ces quatre produits* aab, a^3bb, aab^3, ab^4, *sont quatre moyens proportionnels ; ainsi de suite des autres puissances.*

Ce qui se prouve par la démonstration qui a été employée dans les deux Corollaires précédens, & qui se peut appliquer à toutes ces puissances. Ainsi je ne proposerai toutes ces vérités que par les expressions suivantes, qui font connoître combien de moyens proportionnels se trouvent entre deux puissances, selon que les racines de ces puissances sont multipliées les unes par les autres ; de la maniere qu'on le peut remarquer dans la Table suivante.

Avis sur cette Table.

23. Cette Table représente la Grandeur complexe $a+b$ élevée à différens degrés jusqu'au dixiéme ; son premier degré est $a+b$, son second $aa+2ab+bb$, ou $a^2+2ab+b^2$; mais on ne voit point dans cette Table les *coefficiens*, c'est ainsi qu'on appelle par exemple ce nombre 2 mis devant le plan ab ; car comme on a vû entre les quarrés a^2 & b^2, il y a un double plan qui a pour racine celle de ces deux quarrés. Ainsi si on élevoit $a+b$ au troisiéme degré entre a^3 & b^3, il y auroit le triple de deux solides, dans lesquels ce nombre 3 est *coefficient* ; ce que nous dirons en son lieu plus exactement. Or il est évident qu'après avoir ôté ces coefficiens ; ce qui reste sont des Grandeurs qui sont en progression, comme on le vient de voir dans les Corollaires précédens $\div a^2 . ab . b^2$. ainsi des autres degrés, ce qu'il sera facile de prouver d'un chacun, selon l'énoncé de ce quatriéme Corollaire.

Remarquez aussi que les exposans des puissances d'une

d'une même grandeur font une progression Arithmétique a^1. a^2. a^3. a^4. a^5. a^6. &c. Ainsi pour trouver l'exposant du produit de deux puissances, par exemple de a^2 multiplié par a^3, il faut ajouter dans une somme les exposans 2 & 3, ce qui fait 5, exposant du produit de ces deux puissances. Comme il est évident $aa = a^2$. $aaa = a^3$. $aaaa = a^4$. $aaaaa = a^5$. comme aussi le quarré de a^2, c'est a^2 multiplié par a^2; pour avoir l'exposant de ce quarré, il faut ajouter 2 à 2. ce qui fera a^4. Ainsi l'exposant du quarré de a^3, est a^6; celui du quarré de a^4, est a^8.

10	∺ a^{10}	$a^9 b$	$a^8 bb$	$a^7 b^3$	$a^6 b^4$	$a^5 b^5$	$a^4 b^6$	$a^3 b^7$	aab^8	ab^9	b^{10}
9	∺ a^9	$a^8 b$	$a^7 bb$	$a^6 b^3$	$a^5 b^4$	$a^4 b^5$	$a^3 b^6$	$aa b^7$	ab^8	b^9	
8	∺ a^8	$a^7 b$	$a^6 bb$	$a^5 b^3$	$a^4 b^4$	$a^3 b^5$	aab^6	ab^7	b^8		
7	∺ a^7	$a^6 b$	$a^5 bb$	$a^4 b^3$	$a^3 b^4$	aab^5	ab^6	b^7			
6	∺ a^6	$a^5 b$	$a^4 bb$	$a^3 b^3$	aab^4	ab^5	b^6				
5	∺ a^5	$a^4 b$	$a^3 bb$	aab^3	ab^4	b^5					
4	∺ a^4	$a^3 b$	$aabb$	ab^3	b^4						
3	∺ a^3	aab	abb	b^3							
2	∺ a^2	ab	b^2								
1	$a+b$										

PROPOSITION SIXIEME.

Théorême Cinquiéme.

Les plans sont les uns aux autres en raison composée de leurs racines. 24.

Soient les deux plans donnés *bd* & *cf*, je dis que leur raison est composée de celle de *b* à *c* & de celle de *d* à *f*. Le premier plan *bd* est produit par la multiplication des antécédens *b* & *d* de ces deux raisons, & *cf* le second plan est fait par la multiplication des conséquens *c* & *f*; donc par la Proposition 3[e]. *bd* est à *cf* en raison composée de *b* à *c*, & de celle de *d* à *f*.

COROLLAIRE.

Les quarrés sont entr'eux en raison doublée de celles de leurs racines. 25.

bb & *dd* sont deux quarrés qui sont l'un à l'autre en raison composée de celle de *b* à *d*, & de celle de *b* à *d*. Or ces deux raisons sont égales; donc par la troisiéme Définition, la raison composée de *bb* à *dd* est doublée.

PROPOSITION SEPTIEME.

Théorême Sixiéme.

La raison d'un solide à un autre solide est composée des raisons que leurs racines ont entre elles. 26.

bdc & *fgh* sont deux solides. Il faut prouver que la raison du premier au second est composée de ces trois raisons *b* à *f*, de *d* à *g*, de *c* à *h*. Le premier

est fait de la multiplication des antécédens de ces trois raisons qui sont *b*, *d*, *c*, & le second est fait des trois conséquens *f*, *g*, *h*, multipliés de la même maniere : donc par la 3e Proposition, la raison de *bdc* à *fgh*, est composée de ces trois raisons.

C o r o l l a i r e.

17. *Les cubes sont entr'eux en raison triplée, de celles de leurs racines.*

bbb, *ccc*, sont deux cubes. Par la présente Proposition la raison du premier au second est composée des trois raisons de *b* à *c*, de *b* à *c*, de *b* à *c*. Or ces trois raisons sont égales : donc par la 4e Définition la raison qu'elles composent est une raison triplée.

P r o p o s i t i o n H u i t i e m e.

Théorême Septiéme.

18. *Les quarrés de quarrés sont en raison composée de leurs racines, & cette raison est quadruplée, ainsi des autres puissances.*

Cette Proposition se prouve comme les deux précédentes. Les quatriémes Puissances ont leurs quatre racines égales : ainsi la raison qu'elles ont entr'elles est quadruplée. Il en est de même des autres puissances. Il est évident que les cinquiémes puissances sont en raison quintuplée de celle de leurs racines, les sixiémes en raison sextuplée ; ainsi de suite.

PROPOSITION NEUVIEME.

Théoréme Huitiéme.

Lorsque des Grandeurs sont proportionnelles, leurs quarrés & leurs cubes, & toutes leurs puissances sont proportionnelles; de même, lorsque les puissances sont proportionnelles, les racines le sont aussi. 29.

Si $a. b :: c. d.$ je dis que $\left\{ \begin{array}{l} a^5. b^5. :: c^5. d^5. \\ a^4. b^4. :: c^4. d^4. \\ a^3. b^3. :: c^3. d^3. \\ a^2. b^2. :: c^2. d^2. \end{array} \right.$

La raison de *aa* avec *bb*, & celle de *cc* avec *dd*, est doublée d'une même raison, sçavoir de celle de *a* avec *b*, & de *c* avec *d*. La raison de *aaa* avec *bbb*, & de celle de *ccc* avec *ddd*, sont triplées de cette même raison de *a* avec *b*, & de celle de *c* avec *d*; ainsi les raisons composantes étant égales par l'Axiome second, les composées seront égales.

La converse de cette proposition est manifeste, qui est que lorsque des quarrés ou des cubes sont proportionnels, leurs racines sont proportionnelles.

COROLLAIRE.

Les quarrés, les cubes, & les autres puissances des termes d'une progression, sont en progression. 30.

Puisque les quarrés & les cubes de Grandeurs proportionnelles sont proportionnels, si la proportion des Grandeurs est continue, il est évident que celle de leurs quarrés & de leurs cubes doit être aussi continue.

Si $\div a. b. c.$ il faut que $\left\{ \begin{array}{l} \div aa. \ bb. \ cc. \\ \div aaa. \ bbb. \ ccc. \\ \div a^4. \ b^4. \ c^4. \\ \div a^5. \ b^5. \ c^5. \end{array} \right.$

PROPOSITION DIXIEME.

Théorême neuviéme.

31. *Toutes les puissances ou degrés d'une même grandeur rangés de suite, sont en progression.*

Soit a élevé à ses puissances qui soient ici rangées de suite, $a^1. a^2. a^3: a^4. a^5. a^6. a^7. a^8.$ &c. c'est une même raison qui regne; car divisant la puissance qui suit par la précédente, c'est toujours le même quotient qui est ici a. Par conséquent, selon la Définition de la progression, cet ordre des puissances rangées, selon leur degré, fait une progression.

PROPOSITION ONZIEME.

Théorême Dixiéme.

32. *En toute progression Géométrique, les quarrés de deux termes qui se suivent immédiatement, sont entr'eux comme le premier terme à celui qui suit le second.*

Soit $\div$ *b. c. d. f.* &c. Je dis que *bb* à *cc* :: *b. d.* Car, $\bar{s}$. n. 25. la raison de *bb* à *cc* est doublée de la raison de *b* à *c*, qui est la même que celle de *c* à *d*. Or, $\bar{s}$. n. 13. la raison de *b* à *d* est composée de ces deux mêmes raisons; donc par le second Axiome, $\bar{s}$. n. 9. il y a une même raison entre *bb* & *cc*, qu'entre *b* & *d*, donc *bb. cc* :: *b. d.*

PROPOSITION DOUZIEME.

Théorême Onziéme.

33. *Dans une progression Géométrique, le cube du*

premier terme eſt au cube du ſecond, comme le premier terme eſt à celui qui ſuit le troiſiéme.

Soit ∺ *b. c. d. f.* &c. je dis que *bbb. ccc* :: *b. f.* la raiſon de *bbb* à *ccc* eſt triplée de celle de *b* à *c*, qui eſt la même que celle de *c* à *d*, & de *d* à *f*. ſ. n. 27. Or la raiſon de *b* à *f*. eſt compoſée de ces trois mêmes raiſons, ſ. n. 13. Donc celle de *bbb* à *ccc* eſt égale à celle de *b* à *f*.

Ce Theorême donne le moyen de doubler un cube; car puiſque bbb. ccc :: b. f. *Pour trouver un cube double de* bbb, *il faut prendre le double de* b, & *entre* b & *ce double que je nomme* f, *trouver* c & d *deux moyens proportionnels. On va voir comment ces moyens ſe trouvent. Si* f *eſt le double de* b, *le cube de* c *ſera le double du cube de* b.

Proposition Treizieme.

Théorême Douziéme.

Dans une progreſſion Géométrique, le quarré de quarré du premier terme, eſt à la même puiſſance du ſecond, comme le premier terme eſt à celui qui ſuit le quatriéme; ainſi des autres puiſſances. 34.

Cette Propoſition ſe prouve comme les deux précédentes. Il en eſt de même des autres puiſſances. La cinquiéme puiſſance du premier terme eſt à la cinquiéme puiſſance du ſecond, comme le premier terme eſt à celui qui ſuit le cinquiéme; ainſi de ſuite.

Proposition Quatorzieme.

Problême ſecond.

Trouver un moyen proportionnel entre deux Grandeurs données. 35.

Il faut multiplier les deux Grandeurs données l'une par l'autre, la racine quarrée de ce produit sera un moyen proportionnel entre ces deux Grandeurs, Liv. III. n. 86. Ainsi les deux Grandeurs données étant *b* & *c*, la racine quarrée de *bc* sera un moyen proportionnel entre *b* & *c*. Si l'on cherche un moyen entre 2 & 18, je multiplie donc 2 par 18, ce qui fait 36, la racine quarrée de ce produit qui est 6, sera un moyen proportionnel entre 2 & 18.

Autrement.

Si les deux nombres donnés sont quarrés comme le sont 4 & 16, il faut prendre la racine de l'un & de l'autre; celle de 4 est 2, celle de 16 est 4, le produit 2 par 4, qui est 8, sera moyen proportionnel entre 4 & 16, par le premier ou second Corollaire de la cinquiéme Proposition, s. n. 19.

PROPOSITION QUINZIEME.

Problême Troisiéme.

36. *Trouver deux moyens proportionnels entre deux Grandeurs données.*

Cette Proposition est quelquefois impossible aussi bien que la précédente, quand il s'agit de nombres. Nous verrons en quel cas, lorsque nous parlerons des incommensurables.

Soient ces deux nombres 2 & 16 entre lesquels il faut trouver deux moyens proportionnels. J'appelle ces moyens *m* & *n*; ainsi $\div$ 2. *m*. *n*. 16. Le cube de 2 qui est 8, est à m^3, comme 2 est à 16, s. n. 33. Ainsi

8. m^3 :: 2. 16. ou, 2. 16 :: 8. m^3.

Voilà donc une proportion de quatre termes dont

les trois premiers sont connus. Je trouve la valeur du cube m^3, multipliant 16 par 8, ce qui fait 128, que je divise par 2, premier terme de cette proportion, le quotient est 64, qui sera la valeur de m^3. La racine cube de 64 est à 4 ; donc m, premier moyen proportionnel, vaut 4. Je cherche ensuite par la Proposition précédente un moyen proportionnel entre 4 & 16, qui est 8. Donc n vaut 8 ; ainsi j'ai trouvé entre 2 & 16 deux moyens proportionnels ; ce qui étoit proposé.

Autrement.

Si les nombres donnés sont des cubes, comme 8 & 64, je prens leurs racines cubiques qui sont 2 & 4 ; je mutiplie le quarré de la premiere racine 2 par la seconde, c'est-à-dire 4 par 4. ce qui produit 16, & le quarré de la seconde racine 4 par la premiere racine, c'est-à-dire 16 par 2, ce qui fait 32. Or $\div$ 8. 16. 32. 64, $\overline{s}$. n. 21.

PROPOSITION SEIZIEME.

Problême Quatriéme.

Entre deux Grandeurs données, trouver tant de moyens proportionnels qu'on voudra. 37.

Soient ces deux grandeurs b & l, on propose de trouver cinq moyens proportionnels, sçavoir, $c. d. f. g. h.$ Comme b est à l, la sixiéme puissance de b est à la sixiéme puissance de c premier moyen proportionnel, $\overline{s}$. n. 34. Donc

$$b.\ l \div b^6.\ c^6.$$

Ainsi on trouvera la valeur de c^6, qui est le quatriéme terme de cette proportion, dont les trois premiers termes sont connus. Ce premier moyen

L v

étant connu, on trouvera le second; car $c. l :: c^5. d^5$. s̃. n. 34. La valeur de d étant connue, on trouvera celle de f; car $d. l :: d^4. f^4$., ainsi de suite.

Autrement.

Il faut extraire les racines des Puissances des Grandeurs données, entre lesquelles on veut trouver plusieurs moyens proportionnels, ensuite multiplier ces racines, comme il a été dit, s̃. n. 22.

L'on ne peut pas toujours exprimer par nombres la valeur de ces moyens proportionnels. Nous verrons dans le sixiéme Livre quand est-ce que cela se peut & ne se peut pas faire.

Proposition Dix-septieme.

Théorême Treizieme.

38. *Si deux Grandeurs chacune de deux dimensions sont égales, les deux racines de la premiere seront réciproques à celles de la seconde*, c'est à-dire, *qu'elles seront ou les extrêmes, ou les moyens d'une proportion de quatre termes.*

Si bf & cd sont deux grandeurs égales, leurs racines $b. f. c. d.$ sont réciproques, c'est-à-dire, que b est à c, comme d est à f, ce qui est évident; car on a démontré, Liv. III. n. 69. que lorsque quatre grandeurs sont tellement rangées, que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, ces grandeurs sont proportionnelles.

Proposition Dix-huitieme.

Théorême Quatorziéme.

39. *Dans une proportion de quatre termes, le produit*

des moyens ou des extrêmes est moyen proportionnel entre le produit des antécédens, & celui des conséquens.

Si *b. c.* :: *d. f.* il faut que *bd cd* :: *b. c.* & *cd. cf* :: *d. f.* s. n. 18; donc *bd. cd* :: *cd. cf*; ou ÷ *bd. cd. cf*: donc *cd* produit des moyens, est moyen proportionnel entre *bd* produit des antécédens, & *cf* produit des conséquens. On peut démontrer de la même maniere que *bf* est moyen proportionnel entre *bd.* & *cf.*

PROPOSITION DIX-NEUVIEME.

Théorême Quinziéme.

Dans une proportion de quatre termes, les quarrés des deux termes de l'une ou de l'autre raison sont entr'eux, comme le produit des antécédens est au produit des conséquens. 40.

Je suppose que *b. c.* :: *d. f.* La proposition est *bb. cc* :: *bd. cf*; ce qui se démontre aisément. Puisque *b. c* :: *d. f*; donc *b. d* :: *c. f.* Donc par la cinquiéme proposition ci-dessus *bb. bd* :: *b. d.* &, *cc. cf* :: *c. f.* Donc puisque la raison de *c* à *f* est la même que celle de *b* à *d*; ainsi *bb. bd* :: *cc cf*; & partant *bb. cc* :: *bd. cf*, qui est ce qu'il falloit prouver. On peut faire une infinité de propositions semblables, qu'il sera également facile de résoudre.

PROPOSITION VINGTIEME.

Problême Cinquiéme.

Trouver la somme des quarrés de chaque terme d'une progression. 41.

Soit cette progression ÷ *a. b. c. d. f. g. h*; je

suppose que q est le quotient du second terme divisé par le premier; ainsi, selon ce qui a été enseigné; je réduis cette progression à celle-ci.

$\div\!\div\ a.\ aq.\ aq^2.\ aq^3.\ aq^4.\ aq^5.$

Voici les quarrés de cette progression qui font une progression, s. n. 30.

$\div\!\div\ aa.\ aaq^2.\ aaq^4.\ aaq^6.\ aaq^8.\ aaq^{10}.$

Cette seule expression découvre le moyen de résoudre la question; car il ne s'agit que de chercher la somme de cette progression, dont on connoît le premier, le second & le dernier terme, & de combien de termes elle est composée; cette somme se trouve, comme il a été enseigné par la 24^e. Proposition du Livre III.

Proposition Vingt-unieme.

Théorême Seiziéme.

42. *Dans une progression* $\div\!\div$ c. d. f. g, *l'un de ces termes* c *sera à* f, *comme la somme des quarrés de* c *&* *de* d *est à la somme des quarrés de* d *&* *de* f. e. C'est-à-dire que $c.\ f :: cc + dd.\ cc + ff$; ce qu'il est facile de démontrer. Car, s. n. 32. $cc.\ dd :: c.\ f$, &, $dd.\ ff :: d.\ g$. Or la raison de d à g est la même que celle de d à f; donc ajoutant à cc & à dd des grandeurs qui ayent même raison, $cc + dd.\ dd + ff :: cc.\ dd$ Livre III. n. 58. Partant $cc + dd.\ dd + ff :: c.\ f$; ce qu'il falloit démontrer, & ce qui donne jour pour démontrer plusieurs Théorêmes semblables, comme sont ceux-ci qui suivent.

PROPOSITION VINGT-DEUXIEME.

Théorême Dix-feptiéme.

Comme c *eſt à* g, *la ſomme des cubes de* c, *de* d, *de* f, *eſt à la ſomme des cubes de* d, *de* f, *de* g. 43.

PROPOSITION VINGT-TROISIEME.

Théorême Dix-huitiéme.

Comme c *eſt à* f, *le quarré de* c+d *eſt au quarré de* d+f. 44.

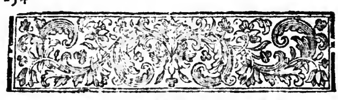
Comme c *eſt à* g, *le cube de* c+d+f *eſt à celui de* d+f+g.

PROPOSITION VINGT-QUATRIEME.

Problême Dix-neuviéme.

Comme c *eſt à* f, *ainſi la différence des quarrés de* c *&* *de* d *eſt à la différence des quarrés de* d *& de* f. 45.

La démonſtration de ce dernier Théorême eſt encore facile. Puiſque *cc. dd* : : *c. f.* & *dd. ff* : : *c. f*; donc, Livre III. n. 60. ôtant de *dd.* & de *ff*, les grandeurs *cc* & *dd*, qui ont même raiſon, ils demeureront en même raiſon, *dd*—*cc*. *ff*—*dd* : : *c. f.* Or *dd*—*cc* eſt la différence de *cc* & de *dd*, comme *ff*—*dd* eſt la différence de *dd*, & de *ff*.



ELEMENS DES MATHEMATIQUES, *OU* TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GÉNÉRAL.

LIVRE CINQUIEME.

Des Fractions & des Opérations Arithmétiques sur les Fractions & sur les Raisons.

SECTION PREMIERE.

Préparations pour faire les Opérations de l'Arithmétique sur les Fractions & sur les Raisons.

CHAPITRE PREMIER.

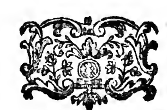
Les Fractions sont des manieres d'exprimer une Raison ; ainsi les Fractions sont des Raisons.

LES Fractions ou nombres rompus ne sont rien autre chose que des manieres d'exprimer la raison qu'ont deux ou plusieurs nombres

entr'eux ; ce font ainſi des raiſons. C'eſt pourquoi je m'étonne qu'un très-habile homme ait dit, qu'autrefois on n'avoit pas pris garde qu'on pouvoit faire toutes les Opérations Arithmétiques fur les raiſons ; puiſque de tout tems on a ajouté, on a ſouſtrait, on a multiplié & diviſé des fractions qui ne ſont que des raiſons.

Les expreſſions en quoi conſiſtent les fractions ſont fort naturelles, c'eſt-à-dire, qu'elles ſont propres pour marquer ce qu'on veut qu'elles expriment. On appelle fraction, par exemple, cette expreſſion $\frac{5}{6}$, qui marque qu'une grandeur entiere a été rompue en ſix parties ; ou qu'elle a ſix parties, dont on ne prend que cinq. Cette expreſſion, dis-je, $\frac{5}{6}$ eſt propre pour marquer une raiſon ; car *raiſon*, comme on l'a dit ſouvent, c'eſt une maniere de contenir ou d'être contenu ; ce qu'on connoît par la diviſion, qui fait voir combien de fois une grandeur eſt dans une autre : c'eſt pourquoi le quotient de la diviſion de deux grandeurs eſt l'expoſant de leur raiſon. Or on a vû que le ſigne général de la diviſion étoit une petite ligne ſur laquelle on mettoit la grandeur à diviſer, & deſſous le diviſeur comme pour diviſer b par c, on écrit $\frac{b}{c}$. Le quotient de b diviſé par c étant donc $\frac{b}{c}$, cette expreſſion eſt propre pour marquer la raiſon de b à c. Par la même raiſon $\frac{5}{6}$ étant une marque qu'il faut concevoir que 5 eſt diviſé par 6, cette expreſſion marque la raiſon de 5 à 6.

Nous avons dit dès le premier Livre, que lorſque le diviſeur étoit plus grand que le nombre à diviſer, il le falloit mettre ſous ce nombre. Par exemple, que pour diviſer 5 par 6, on devoit écrire $\frac{5}{6}$. On voit à préſent la raiſon de cette regle. On appelle cette expreſſion une fraction; parce que, comme on va le dire, on ſuppoſe que chaque unité du reſte du nombre à diviſer eſt rompue en autant de parties qu'il y a d'unités dans le diviſeur. Par exemple, ſi 5 ſont cinq écus qui reſtent à diviſer, ou à partager à ſix perſonnes, comme chacune ne peut pas en avoir un écu, puiſqu'il n'y en a que 5, on conçoit que chaque écu eſt diviſé en 6 parties, dont chacune vaut dix ſols; ainſi cette expreſſion $\frac{5}{6}$ dit que cinq écus étant diviſés à ſix perſonnes, chacune a cinq parties telles que l'écu en vaut ſix. Vous voyez donc pourquoi on appelle ces expreſſions *des Fractions*, & que $\frac{5}{6}$ eſt un nombre rompu, à cauſe que 6 eſt un nombre qui marque l'unité rompue en ſix parties. C'eſt ce que nous allons expliquer avec ſoin, & fort aiſément; car tous les principes ont été établis, puiſque ces fractions ne ſont que des raiſons.



CHAPITRE II.

Définitions & explications des termes. Axiomes ou Propositions évidentes touchant les fractions.

PREMIERE DEFINITION.

Fraction est une expression qui exprime le rapport de la partie d'un nombre entier, qui est rompu & divisé en tant de parties qu'on a voulu avec ce nombre entier. 2.

Soit *a* une grandeur entiere ; par exemple, une toise : ayant rompu ce nombre entier *a* en 12 parties, on met, comme on l'a dit, ce nombre 12, qui marque en combien de parties la grandeur *a* ou le nombre 1 est rompu, sous une petite ligne ou barre, en cette maniere, $\overline{12}$. Après pour exprimer le nombre des parties de *a*, soit la sixiéme, soit la quatriéme, ou quelqu'autre partie que ce soit, on met dessus cette ligne ou barre le nombre des parties qu'on veut exprimer en cette maniere $\frac{6}{12}$ ou $\frac{4}{12}$. Cette fraction $\frac{6}{12}$ vaut 6 parties de *a*, telles que *a* en vaut 12. Cette fraction $\frac{4}{12}$ vaut 4 parties telles que toute la grandeur *a* en vaut 12.

SECONDE DEFINITION.

Dans une fraction les nombres qui sont sous la 3.

ligne s'appellent Dénominateurs de la fraction, parce qu'ils font connoître en combien de parties l'entier est rompu ou partagé; ainsi ces nombres donnent le nom à la fraction.

Dans cette fraction $\frac{3}{4}$, le nombre 4 qui est sous la ligne, est le dénominateur de cette fraction, parce que faisant connoître que l'entier dont $\frac{3}{4}$ est la fraction est rompu en 4 parties, il donne le nom à la fraction; car si $\frac{3}{4}$ est la fraction d'un écu, on dira que cette fraction vaut trois quarts d'écu.

Troisieme Definition.

4. *Dans une fraction le nombre qui est sur la ligne s'appelle le numérateur.*

Dans cette fraction $\frac{3}{4}$, le nombre 3 qui est sur la ligne est appellé le numérateur de cette fraction; parce qu'il nombre les parties que vaut cette fraction de l'entier qui est rompu en quatre parties, sçavoir, $\frac{3}{4}$ de la grandeur a, c'est-à-dire, les trois quarts de cette grandeur a.

Quatriéme Definition.

5. *Fractions de fractions sont des nombres qui expriment les parties de la partie d'un entier.*

Soit a un écu, soit b moitié de cet entier a, le nombre qui exprimera quelques parties de b, sera un nombre doublement rompu. Ces fra-

ctions de fractions s'expriment en cette maniere. La premiere fraction qui vaut la moitié de *a*, se doit exprimer ainsi $\frac{1}{2}$; & puisque cette moitié est rompue encore en deux parties, il faut rompre le premier numérateur 1 en deux parties, ce qui sera $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ c'est-à-dire une moitié d'une moitié. Ainsi comme une simple fraction exprime la raison d'une partie à son tout, une fraction de fraction exprime la raison d'une partie de partie à la grandeur entiere.

On pourroit rompre une troisiéme fois cette seconde fraction, disant une moitié d'une moitié d'une moitié, $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$, & pour lors ce seroit une fraction de fraction de fraction; ainsi à l'infini.

1. Axiome ou Demande.

Le dénominateur d'une fraction vaut toujours un entier. 6.

Dans cette fraction $\frac{3}{4}$, le dénominateur 4 vaut un entier, puisqu'il montre en combien de parties l'entier est divisé, & qu'il exprime toutes ses parties, lesquelles prises ensemble égalent le tout ou l'entier.

2. Axiome ou Demande.

Lorsque le numérateur est égal à son dénominateur, il vaut un entier; s'il est plus petit, il vaut moins qu'un entier; s'il est plus grand, il vaut davantage. 7.

Dans cette fraction $\frac{4}{4}$, le numérateur 4 vaut un entier, puisqu'il comprend toutes les parties du dénominateur.

Dans cette fraction $\frac{2}{4}$, le numérateur 2 vaut moins que son dénominateur 4, parce qu'il ne vaut que 2 parties telles que 4 en vaut 4.

Dans cette fraction $\frac{6}{4}$, le numérateur 6 vaut plus que son dénominateur, parce qu'il vaut 6 parties telles que 4 n'en vaut que 4.

3. Axiome ou Demande.

8. *Les fractions ne sont que l'expression de la raison qui est entre un tout & sa partie.*

Par exemple, $\frac{3}{4}$ d'un écu. Cette fraction exprime la valeur d'un nombre qui a la même raison à un écu entier, que celle qui est entre ces deux nombres 3 & 4.

4. Axiome ou Demande.

9. *Quoiqu'on ajoute ou qu'on retranche du numerateur & du dénominateur d'une fraction, la valeur en sera la meme, si la même raison demeure entre le numérateur & le dénominateur devant & après ce changement.*

Cette proposition est une suite de la précédente, puisqu'une fraction est une raison; la valeur sera la même, si c'est une même raison. Ainsi. $\frac{2}{4}$ & $\frac{6}{12}$ & $\frac{5}{10}$ ne valent que la moitié de l'entier

mis en fraction, pendant que le numérateur sera la moitié du dénominateur, la fraction vaudra toujours la moitié de l'entier. Six parties de douze parties ne disent pas autre chose que deux parties de quatre parties, cinq parties de dix parties. Toutes ces expressions signifient une même chose, sçavoir la moitié d'un même tout, dont il est question.

CHAPITRE III.

Préparations nécessaires pour faire les opérations de l'Arithmétique sur les Fractions & Raisons.

PROPOSITION PREMIERE.

Problême Premier.

Réduire un tout en ses parties. 10.

Il faut multiplier le tout par le nombre des parties dans lesquelles on le veut réduire.

Soient 10 écus que l'on veut réduire en sols. Chaque écu est composé de 60 sols; je multiplie donc 10 par 60, le produit de cette multiplication qui est 600, sera le nombre de sols que valent 10 écus; ce qui est clair. Car si un écu vaut 60 sols, il faut que 10 écus valent 10 fois 60 sols.

COROLLAIRE I.

Par le moyen de cette Proposition on donne le même nom à deux Grandeurs différentes, ce qui fait connoître plus clairement leur rapport. 11.

Car, par exemple, comparant un écu avec 40 ſols, ſi l'on réduit un écu en ſes parties qui ſont 60 ſols, on apperçoit plus clairement la raiſon de 40 à 60 ſols, que d'un écu à 60 ſols.

COROLLAIRE 2.

12. *On peut évaluer les monnoies & meſures.*

Evaluer une grande monnoie ou une grande meſure, c'eſt exprimer la valeur d'une monnoie ou d'une meſure par une autre eſpece de monnoie plus connue, ou une autre eſpece de meſure plus connue.

On veut ſçavoir combien cent écus d'or valent de ſols; il faut multiplier 100 écus par 114 ſols, qui étoient autrefois les parties d'un écu d'or, le produit 11400 ſera la valeur de 100 écus d'or, qui valent ainſi 11400 ſols.

On veut ſçavoir combien 100 toiſes valent de pieds. Les parties connues d'une toiſe ſont 6 pieds: je multiplie 100 par 6; le produit qui eſt 600 pieds, ſera la valeur de 100 toiſes.

COROLLAIRE 3.

13. *On peut réduire un entier à une fraction, dont le nom eſt donné.*

Le dénominateur de la fraction eſt 6. On veut réduire ce nombre entier 4 à une fraction dont le dénominateur ſoit 6, il faut multiplier 4 par 6, ce qui ſera 24, & écrire 6 ſous 24. Cette fraction $\frac{24}{6}$ vaudra 4 entiers, car le numérateur 24 contient 4 fois le dénominateur 6 qui vaut un entier.

Pour réduire la grandeur a dans une fraction, dont le dénominateur ſoit d, ſuivant ce que nous

venons de dire, je multiplie a par d, ce qui fait ad, que je place au-dessus d'une ligne sous laquelle je place d en cette maniere $\frac{ad}{d}$. De même pour réduire cette grandeur a dans une fraction dont $a+b$ soit le dénominateur, je multiplie a par $a+b$, le produit $aa+ab$, sous lequel je place $a+b$, de cette sorte $\frac{aa+ab}{a+b}$

COROLLAIRE 4.

Pour réduire un entier en fraction, il ne faut qu'écrire le nombre donné au-dessus d'une ligne, & l'unité au-dessous. 14.

Par exemple, pour exprimer en fraction un écu, j'écrirai $\frac{1}{1}$ d'écu, car le numérateur étant égal au dénominateur par le second Axiome, $\frac{1}{1}$ vaut un écu. Ainsi pour réduire la grandeur x en fraction, j'écris $\frac{x}{1}$; car divisant x par 1, le quotient est x : partant $\frac{x}{1}$ est égal à x, c'est-à-dire à la grandeur entiere.

Remarquez que pour marquer la partie d'une grandeur exprimée par des lettres qu'on ne peut pas diviser comme des chiffres, l'on met à côté une fraction avec des chiffres qui expriment la valeur de la partie qu'on veut signifier; ainsi pour exprimer la quatriéme partie de aa, j'écris $\frac{1}{4}$ *aa.*

SECONDE PROPOSITION.

Problême second.

15. *Rappeller les parties à leur tout.*
Il faut divifer le nombre des parties données par le nombre qui marque combien leur entier les contient de fois. Par exemple, pour réduire 600 fols en écus ; puifque 60 font un écu, je divife 600 par 60, le quotient 10 montre que 600 fols valent 10 écus, puifque ce nombre de fols vaut 10 fois 60.

COROLLAIRE I.

16. *Par le moyen de cette Propofition on donne un même nom à deux grandeurs différentes ; ce qui fait que l'on découvre plus clairement leur rapport.*
Soient données ces deux grandeurs 600 deniers & 100 fols, je donne le même nom à ces deux fommes, en réduifant les deniers en fols, ce que je fais en divifant 600 par 12, qui eft le nombre des deniers qui font un fol : le quotient de cette divifion qui eft 50, fait connoitre que 600 deniers valent 50 fols. Le rapport de 50 fols à 100 fols eft plus fenfible que celui de 600 deniers à 100 fols.

COROLLAIRE 2.

17. *L'on peut réduire les petites monnoies à de plus grandes, & les évaluer, c'eft-à-dire, voir ce qu'elles valent au regard de celles qui font plus grandes.*
Je veux fçavoir combien 600 deniers valent de fols, 12 deniers font un fol, je divife 600 par 12,

le

le quotient de cette division, 30, sera 50 sols, valeur de 600 deniers.

Je veux sçavoir combien 120 pieds font de toises, 6 pieds font une toise. Je divise 120 par 6, le quotient qui est 20, marque que 120 pieds valent 20 toises.

Corollaire 3.

L'on peut réduire une fraction en nombres entiers, & connoître combien elle vaut d'entiers. 18.

Je suppose que cette fraction vaille tout au moins un entier. Par exemple, soit cette fraction $\frac{24}{4}$. Je divise 24 numérateur par le dénominateur 4; le quotient de cette division 6 fera connoître que $\frac{24}{4}$ vaut 6 entiers; car 24 doit valoir autant d'entiers que 4 est contenu dans 24, selon le second Axiome cidessus; ainsi 4 étant contenu 6 fois dans 24, cette fraction vaut 6 entiers.

Troisieme Proposition.
Problême Troisiéme.

Réduire à un même dénominateur ou à un même conséquent plusieurs fractions ou raisons. 19.

C'est la même chose que de réduire deux raisons à deux expressions, où elles ayent un même conséquent; ce qu'on a enseigné ci-dessus, page [illegible].

Soient ces deux fractions ou raisons $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$, on veut les réduire à un même dénominateur, c'est-à-dire, faire qu'elles ayent un même conséquent, & par conséquent un même nom, sans toutefois rien changer de leur valeur.

$$\frac{2}{5}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{8\quad.\quad15}{20}$$

Il faut multiplier le dénominateur de la premiere par le dénominateur de la seconde, le produit sera le commun dénominateur que j'écris sous une ligne. Après il faut multiplier le numérateur de la premiere, par le numérateur de la seconde. Dans cet exemple 2 par 4, le produit 8 sera le numérateur de la premiere. Enfin le numérateur de la seconde par le dénominateur de la premiere, c'est-à-dire 3 par 5, dont le produit 15 sera le numérateur de la seconde; car le numérateur 2 & le dénominateur 5 de cette fraction $\frac{2}{5}$, ont été multipliés par le même nombre, sçavoir 4; le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{3}{4}$ ont aussi été multipliés par le même nombre 5. Ainsi, Liv. III. n. 63. 8 est à 20, comme 2 à 5; & 15 est à 20 comme 3 à 4; donc par l'Axiome 4^e ci-dessus, ce sont les mêmes fractions $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ & $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$.

S'il falloit réduire plusieurs fractions à un même dénominateur, il faudroit réduire premierement les deux premieres à un même dénominateur, après les réduire toutes trois en cette maniere.

Soit donnée $\frac{5}{6}$ une troisiéme fraction; les deux fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$, ayant déja été réduites à celle-ci $\frac{8 \quad 15}{20}$, je multiplie 20 par 6; ce qui fait 120, qui sera le dénominateur commun des trois fractions; après je multiplie 8 par 6, ce qui sera 48, qui

sera le numérateur de la premiere fraction, & 15 par 6, ce qui fait 90, qui sera le numérateur de la seconde fraction; enfin je multiplie 5, numérateur de la troisiéme fraction, par 20, dénominateur des deux premieres fractions, cela fait 100, numérateur de cette troisiéme; ainsi ces trois fractions sont réduites à celle-ci $\frac{48 \quad 90 \quad 100}{120}$ qui ont un même conséquent ou un même dénominateur, & qui sont toujours les mêmes que les autres $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$; puisque ce sont les mêmes raisons.

Soient données ces deux fractions $\frac{b}{x}$ & $\frac{c}{z}$. Si on suit la regle précédente, c'est-à-dire, qu'on multiplie les dénominateurs x & z l'un par l'autre, & le numérateur de la premiere par le dénominateur de la seconde, b par z, & le numérateur de la seconde par le dénominateur de la premiere, c par x, elles seront réduites à ces deux fractions ou raisons, qui ont le même conséquent & ainsi le même nom $\frac{bz}{xz}$ & $\frac{cx}{xz}$.

COROLLAIRE PREMIER.

Par le moyen de cette Proposition, on peut connoître sensiblement le rapport de deux fractions différentes, 20.

Soient ces deux fractions $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{4}$, je veux connoître l'excès de l'une pardessus l'autre, je les réduis à ces deux fractions suivantes qui ont

un même dénominateur ou conséquent $\frac{8}{20}$ & $\frac{15}{20}$, qui sont les mêmes. Aprés quoi je vois clairement que la premiere est plus petite que la seconde de sept parties, telles que la grandeur entiere exprimée par le dénominateur 20, en contient 20. Ayant réduit ces deux raisons $\frac{b}{x}$ & $\frac{c}{z}$ à celles-ci $\frac{bz}{xz}$ & $\frac{cx}{xz}$ qui ont un même dénominateur, ou même conséquent, on voit plus sensiblement quel est leur rapport.

Corollaire Second.

21. *Deux raisons étant données, on peut connoître quelle est la plus grande & quelle est la plus petite.*

Pour entendre en quoi consiste cet excès d'une raison par-dessus une autre raison, il faut remarquer que la raison étant une maniere d'être d'une grandeur à l'égard des grandeurs avec qui elle est comparée; ce qui se dit d'une raison s'entend particulierement du premier terme qui est comparé: ainsi lorsque l'antécédent d'une raison est plus grand à l'égard de son conséquent que l'antécédent d'une autre raison à l'égard de son conséquent, la premiere raison est plus grande que la seconde. Pour remarquer donc sensiblement cet excès, il faut donner aux deux antécédens de ces deux raisons le même conséquent, en les réduisant au même nom. Ainsi ces deux raisons $\frac{2}{7}$ & $\frac{4}{9}$ étant données, les ayant réduit à ces deux raisons qui ont un même conséquent $\frac{18 \quad 28}{63}$

l'on apperçoit clairement que la premiere raison est plus petite que la seconde, puisque 18 est plus petit au regard de 63, que 28 au regard du même nombre 63.

LEMME PREMIER.

Trouver la plus grande commune mesure, ou le plus grand commun diviseur de deux nombres donnés. 22.

On appelle commune mesure, ou commun diviseur de deux nombres, un troisiéme nombre, par lequel les deux premiers peuvent être divisés exactement.

Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres donnés, il faut ôter le plus petit du plus grand.

Premier Cas.

Si l'excès du plus grand mesure exactement le petit, il sera le commun diviseur de tous deux, & le plus grand de tous les communs diviseurs de ces deux nombres.

Soient donnés *b* 25 & *d* 30, ôtant 25 de 30, l'excès de *d* par-dessus *b* est 5; & parce que 5 mesure 25, je dis qu'il mesurera 30, & que c'est le plus grand commun diviseur de *b* & de *d*.

Puisque *d* ne surpasse *b* que d'une fois 5, si 5 est 5 fois dans 25, il faut qu'il soit encore une fois dans *d*; ainsi il le mesure exactement, & il est le plus grand commun diviseur des deux nombres donnes; ce que je démontre. Supposons qu'il y en ait un, *c*, qui soit plus grand. Examinons si cette supposition est possible. Puisque *d* surpasse *b*, il faut que *c* soit plus de fois dans *d* que dans

b. Or ce nombre *c* sera ou plus grand ou plus petit, ou égal à 5, qui est l'excès de *d* par-dessus *b*. S'il est plus grand, il ne mesurera pas exactement *d* & *b*: s'il est plus petit, ou qu'il lui soit égal, il ne sera donc pas un plus grand & commun diviseur de *b* & de *d*, que ce nombre 5, la supposition étoit ainsi impossible.

Second Cas.

Si l'excès du plus grand nombre par-dessus le plus petit ne mesure pas le plus petit, il faut retrancher cet excès du plus petit jusqu'à ce qu'on ait trouvé un nombre qui mesure le plus petit nombre ; ce qui se comprendra mieux par un exemple. Soient donnés 21 & 27, l'excès de 27 par-dessus 21 qui est 6, ne mesure pas 21. Je retranche cet excès 6 de 21, il reste 15, qui ne mesure pas le plus petit nombre 6. Je retranche donc 6 de 15, reste 9, & de 9 je retranche encore une fois 6, le reste est 3, qui mesure exactement 6. Je dis que 3 est la commune & la plus grande mesure des nombres proposés 21 & 27. Car 1°. par la démonstration précédente, 3 est la commune & plus grande mesure de 9 & de 6: & puisque 15 surpasse 9 de 6, il faut que 3 soit la commune mesure de 9 & de 15, & la plus grande; car s'il y en avoit une autre plus grande, 3 ne seroit pas la plus grande mesure de 9 & de 6. L'on démontrera de la même maniere que 3 est la commune & la plus grande mesure de 15 & de 21, de 21 & de 27.

LEMME SECOND.

23. *Trouver le plus petit nombre que peuvent mesurer deux nombres donnés.*

Si l'un des deux nombres donnés est mesuré par l'autre, il sera celui que l'on cherche. Soient donnés 3 & 6, le premier nombre 3 mesure 6, ainsi il est évident que 6 est le plus petit nombre qui puisse être mesuré par les deux nombres 3 & 6.

Si l'un des deux nombres donnés ne mesure pas l'autre, il faut les multiplier l'un par l'autre, & le produit sera le nombre qu'on cherche. Soient donnés 3, 4 : leur produit 12 est le plus petit nombre qui puisse être mesuré par 3 & par 4. Mais cela n'est vrai que lorsque les deux nombres donnés n'excedent pas le plus grand chiffre 9, & qu'ils sont premiers entr'eux. On dira dans la suite quels sont les nombres premiers, 6 & 4 ne sont pas premiers, aussi 6 multiplié par 4 fait 24, qui n'est pas le plus petit nombre que 6 & 4 mesurent, c'est le nombre 12. La regle générale que nous pouvons donner ici, c'est de trouver les deux plus petits nombres qui soient les exposans de leur raison. Comme si 6 & 12 étoient donnés, il faudroit prendre 2 & 3, après quoi multipliant le plus grand nombre par le plus petit exposant, & le plus petit par le plus grand des exposans, ce qui ne doit faire qu'un même produit; ce produit est ce que l'on cherche. Multipliant 8 par 3, & 12 par 2, le nombre 24 produit de l'une & de l'autre multiplication, est le plus petit nombre, que 8 & 12 divisent exactement.

Quatrieme Proposition.

Problême Quatriéme.

Réduire une fraction ou raison aux moindres termes. 24.

Il faut diviser le numérateur & le dénominateur de la fraction par leur plus grande commune mesure.

Soit cette fraction $\frac{30}{48}$, je divise 30 & 48 par 6, qui est la plus grande commune mesure de 30 & de 48, les quotiens 5 & 8 donneront la nouvelle fraction $\frac{5}{8}$; car, Liv. III. n. 65. 5. est à 8, comme 30 est à 48. Donc par l'Axiome 4 ci-dessus, les deux fractions $\frac{30}{48}$ & $\frac{5}{8}$ valent la même chose.

Or, il est certain que cette fraction est réduite aux plus petits termes; car ayant divisé 30 & 48 par 6, qui est leur plus grande & commune mesure, aucune autre division ne peut donner de plus petits exposans que les quotiens de cette division, puisque les plus grands diviseurs donnent les plus petits quotiens. Après cette réduction l'on voit plus nettement le rapport du numérateur de cette fraction à son dénominateur, ou quelle est leur raison.

Les fractions & raisons qui sont exprimées par des lettres, se réduisent facilement à de plus simples termes; car, selon ce qu'on a dit, que lorsque les mêmes lettres se trouvent dans la grandeur à diviser, & dans le diviseur, pour faire la division, il ne faut qu'effacer les lettres semblables qui se trouvent également dans la grandeur à diviser & dans le diviseur; pour diviser bx par x, il ne faut qu'effacer x de la grandeur à diviser bx, & b qui reste est le quotient de cette division.

Par conséquent, pour réduire à de plus simples termes la raison de aac à acd, ou la fraction

$\frac{aac}{acd}$, j'efface du numérateur & du dénominateur les lettres qui se trouvent dans l'un & dans l'autre, ce qui donne cette fraction $\frac{a}{d}$, qui a la même valeur que $\frac{aac}{d}$, c'est-à-dire, que la raison de a à d est la même que celle de aac à acd; car en faisant ce retranchement, j'ai divisé le numérateur aac, & le dénominateur acd par un même diviseur, sçavoir ac; partant les quotiens a & d sont en même raison que aac & acd.

Soit donnée cette fraction $\frac{aac+aad}{cd+dd}$, en effaçant les lettres qui se trouvent dans le numérateur & dans le dénominateur, cette fraction se trouvera réduite à celle-ci $\frac{aa+aa}{d+d}$; & puisqu'en retranchant de deux grandeurs proposées deux autres grandeurs qui ont même raison, la même raison demeure après ce retranchement; on pourra encore réduire la fraction donnée à celle ci $\frac{aa}{d}$; & aa est à d, comme $aac+aad$ est à $cd+dd$.

Lorsque deux fractions ont un même dénominateur, pour les réduire à de plus simples termes, de telle sorte qu'elles ayent toujours un commun dénominateur, il faut prendre garde de n'effacer que les lettres qui se trouveront en même tems dans les deux numérateurs & dans le dénominateur commun.

Soient, par exemple, ces deux fractions qui ont un même dénominateur $\frac{bdcd}{aaccd}$ & $\frac{a^5c}{aaccd}$, j'efface

ſimplement un c des numérateurs & du dénominateur commun, & reſte $\frac{bdd}{aacd}$ & $\frac{a^5}{aacd}$. Si je n'avois pas voulu faire cette réduction de telle ſorte que ces deux fractions euſſent toujours le même dénominateur, je les aurois pu réduire à celles-ci $\frac{bd}{aac}$ & $\frac{a^3}{cd}$.

CINQUIEME PROPOSITION.

Problême Cinquiéme.

25. *Réduire les fractions de fractions à une ſeule fraction.*

Soit donnée cette fraction de fraction $\frac{b}{c}$ de $\frac{c}{z}$, le produit des dénominateurs c & z, qui eſt cz, ſera le dénominateur de la fraction qu'on cherche; & le produit des numérateurs b & c qui eſt bc, ſera le numérateur de cette fraction qui eſt ainſi $\frac{bc}{cz}$.

Par la définition des fractions de fractions, cette fraction de fraction donnée $\frac{b}{c}$ & $\frac{c}{z}$ exprime la raiſon de b partie de c à la grandeur entiere z, dont c eſt auſſi partie. Partant, Liv. IV. n. 12. la raiſon de b à z eſt composée de celle de b à c, & de celle de c à z. Or, Liv. IV. n. 14. la raiſon de bc à cz eſt composée de la raiſon de b à c, & de celle de c à z. Donc la raiſon de bc à zc eſt égale à celle de b à z, ce qu'on cherchoit. Car réduire une fraction de fraction dans une ſeule fraction, c'eſt exprimer tout d'un coup la raiſon de la partie de la partie à la grandeur entiere.

Soit donnée cette fraction de fraction $\frac{2}{4}$ de $\frac{5}{8}$, je multiplie 4, dénominateur de l'une, par 8, dénominateur de l'autre, ce qui fait 32; & 2, numérateur de l'une, par 5, numérateur de l'autre, ce qui fait 10, la fraction $\frac{10}{32}$ sera égale à $\frac{2}{4}$ de $\frac{5}{8}$.

S'il y avoit des fractions de fractions de fractions, pour les réduire dans une seule fraction, par exemple, pour réduire dans une seule fraction cette fraction de fraction de fraction $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{7}{8}$, je multiplie le dénominateur de la premiere par celui de la seconde, 4 par 6, ce qui fait 24; après je multiplie 24 par le dénominateur 8 de la derniere, ce qui fait 192, qui sera le dénominateur de la fraction qu'on cherche.

Je multiplie de la même maniere les numérateurs, le premier par le second, sçavoir 3 par 5, ce qui fait 15; & ce produit 15 par le troisiéme, qui est 7, ce qui fait 105, qui sera le numérateur de la fraction cherchée, qui est par conséquent $\frac{105}{192}$.

Sixieme Proposition.

Problême Sixiéme.

Evaluer une fraction, ou la réduire à des termes connus. 26.

Soit cette fraction $\frac{2}{3}$, qui vaut les deux tiers

d'un écu : on veut l'évaluer, c'est-à-dire, qu'on cherche combien cette fraction vaut de sols.

Je multiplie le numérateur 2 & le dénominateur, qui est 3, par les parties connues d'un écu, qui sont 60 sols, les produits 120 & 180 sont entr'eux comme 2 à 3 ; & ayant divisé 120 & 180 par 3, dénominateur de la fraction donnée, les quotiens 40 & 60 seront encore en même raison que $\frac{2}{3}$. Donc $\frac{2}{3}$ est égal à $\frac{40}{60}$, c'est-à-dire que deux troisiémes d'un écu valent 40 sols.

La multiplication du dénominateur n'est utile que pour la démonstration ; ainsi pour résoudre la présente Proposition, il suffit de multiplier le numérateur de la fraction donnée par les parties connues de la grandeur entiere proposée. Dans l'exemple proposé je multiplie 2 par 60 sols, qui sont les parties connues d'un écu, & je divise 120, produit de cette multiplication, par 3, dénominateur de la fraction donnée ; 40 qui est le quotient, est ce que je cherchois.

Avertissement.

Le produit du numérateur que l'on a multiplié par les parties connues de l'entier, étant divisé par le dénominateur de la fraction, si la division n'est pas exacte, & qu'il reste une fraction, il faut encore évaluer ce reste, & continuer ces évaluations jusqu'à ce qu'il ne reste que des parties, ou connues, ou si petites, que leur valeur ne soit pas considérable. Un exemple rendra cet Avertissement plus clair.

Soit cette fraction $\frac{3}{7}$ d'un écu, sel once qui a

été enseigné, je multiplie le numérateur 3 par les parties connues d'un écu qui sont 60 sols, le produit de cette multiplication est 180, que je divise par le dénominateur 7, le quotient est 25 plus $\frac{5}{7}$; partant $\frac{3}{7}$ d'un écu valent 25 sols plus $\frac{5}{7}$ de sols. Pour sçavoir maintenant ce que vaut cette fraction $\frac{5}{7}$ de sols, je multiplie le numérateur 5 par 12 deniers, parties connues d'un sol, le produit est 60, que je divise par 7, le quotient est 8, plus $\frac{4}{7}$: ainsi $\frac{5}{7}$ d'un sol vaut 8 deniers, plus $\frac{4}{7}$ d'un denier ; la valeur de cette derniere fraction n'est pas considérable.

SEPTIEME PROPOSITION.

Probléme Septiéme.

Diviser un petit nombre par un plus grand. 17.

Il faut écrire le plus grand sous le plus petit, ce qui donne une fraction qui exprime la valeur du quotient que l'on cherche.

Pour diviser 2 par 5, j'écris $\frac{2}{5}$: si ce 2 marque deux écus qu'il faut partager à 5 hommes, chacun aura deux cinquiémes d'écu. Pour réduire ce nombre entier 2 à une fraction dont 5 soit le dénominateur, il faut, s. n. 13. multiplier 2 par 5, dont le produit 10 sera le numérateur de la fraction que l'on cherche, laquelle fraction $\frac{10}{5}$ vaut

le nombre entier 2. Or pour partager 10 cinquiémes d'écus à 5 hommes, il est clair qu'il faut diviser 10 par 5, laquelle division doit avoir pour quotient le nombre entier 2, puisque le nombre 10 a été fait de 2 multiplié par 5. Ainsi en écrivant le plus grand nombre sous le plus petit, on fait en abrégé deux opérations. Par la premiere, on réduit le nombre entier dans une fraction qui a pour dénominateur le diviseur. Par la seconde, on divise le numérateur de cette fraction par le diviseur proposé : & tout cela se fait, comme nous venons de le voir, avec un trait de plume.

Nous ne pouvions pas donner plutôt la démonstration de cette opération que nous avons proposée dans le premier Livre, en traitant de la division des nombres entiers.

SECTION SECONDE.

Opérations Arithmétiques sur les Fractions & sur les Raisons.

AVERTISSEMENT.

NOus avons déja dit que lorsque plusieurs Raisons ont pour conséquent une même grandeur, la grandeur de chaque antécédent, qui est relative à l'égard de son conséquent, peut être regardée comme absolue à l'égard des autres antécédens ; car il est clair que plusieurs tiers d'une même grandeur, par exemple, plusieurs tiers d'un écu, sont entr'eux des grandeurs absolues. Pour donc ajouter 2 tiers à 3 tiers, il ne faut point d'au-

tre regle que les ordinaires ; deux tiers avec trois tiers ſont 5 ; mais auſſi pour faire connoître que ce nombre 5, ſignifie 5 tiers de la grandeur dont il eſt parlé, il faut mettre deſſous le conſéquent 3, qui eſt le dénominateur de cette fraction ou raiſon. Ainſi quand les raiſons ou fractions propoſées ont été réduites à un même nom ou à un même dénominateur, ayant pour lors un même conſéquent, les opérations que l'on fait ſur elles n'ont plus de difficulté. Raiſon & fraction ſont une même choſe ; partant en montrant comment ſe font les Opérations Arithmétiques ſur les fractions, on enſeigne comment elles ſe doivent faire ſur les Raiſons.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Addition, Souſtraction, Multiplication, & Diviſion des Fractions & des Raiſons.

HUITIEME PROPOSITION.

Problême Huitiéme.

AJouter en une ſomme pluſieurs Fractions ou Raiſons. 28.

Il faut premierement les réduire à un même dénominateur, par la troiſiéme Propoſition. Soient $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{4}$, je les réduis à ces trois fractions ou raiſons, qui ont un même dénominateur ou conſéquent $\frac{72 \quad 80 \quad 48}{96}$. J'ajoute en une ſomme les numérateurs 72, 80, 48, ce qui fait 200, ſous

lequel j'écris le dénominateur commun 96; ainsi $\frac{200}{96}$ est égal $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{8}$.

Quand il faut ajouter des nombres entiers avec des nombres rompus, il faut réduire les entiers à une fraction qui ait même nom que la fraction donnée, s. n. 13. Ainsi pour ajouter 6 avec $\frac{2}{8}$, je réduis 6 à une fraction qui ait pour dénominateur 8, qui sera $\frac{48}{8}$, cette fraction ajoutée avec $\frac{2}{8}$, fait $\frac{50}{8}$.

Les opérations qui se font sur les lettres sont encore plus faciles. Pour ajouter ces deux fractions ou raisons $\frac{aa}{c}$ & $\frac{bb}{c}$ en une seule somme, j'écris $\frac{aa+bb}{c}$. La raison de $aa+bb$ à c est égale aux deux raisons de aa à c, & de bb à c, ajoutées en une somme.

PROPOSITION NEUVIEME.

Problême Neuviéme.

29. *Soustraire une petite fraction ou raison d'une plus grande fraction ou raison.*

Soient $\frac{4}{6}$ & $\frac{2}{8}$, il faut retrancher $\frac{2}{8}$ de $\frac{4}{6}$, je les réduis premierement à ces deux fractions ou raisons, qui ont un même dénominateur ou conséquent, $\frac{12 \quad 32}{48}$; après je retranche le numéra-

teur 12 du numérateur 32, le reſte ſera $\frac{20}{48}$.

S'il faut retrancher une fraction d'un entier, ou un entier d'une fraction, il faut réduire l'entier à une fraction qui ait le même dénominateur que la fraction donnée, v. n. 13. Pour retrancher $\frac{3}{4}$ de 8, je réduis cet entier 8 à cette fraction $\frac{32}{4}$, d'où ayant ôté la fraction propoſée $\frac{3}{4}$, il reſte $\frac{29}{4}$. Ainſi pour retrancher la fraction $\frac{aa}{c}$ de la fraction $\frac{bb}{c}$, j'écris $\frac{bb-aa}{c}$.

Dixiéme Proposition.

Problême Dixiéme.

Multiplier une fraction ou raiſon par une autre fraction ou raiſon. 30.

Soient données ces deux fractions ou raiſons $\frac{4}{5}$ & $\frac{2}{3}$, je les réduis à ces deux fractions ou raiſons qui ont un même dénominateur ou conſéquent $\frac{12 \quad 10}{15}$. Je multiplie enſuite le numérateur l'un par l'autre, le produit 120 ſera le numérateur de la fraction $\frac{12}{15}$ multiplié par la fraction $\frac{10}{15}$, ſous lequel numérateur 120 on met ordinairement le produit du dénominateur commun 15 multiplié par lui-même, lequel produit

est ici 225 ; de sorte que le produit des deux fractions données est $\frac{120}{225}$.

Pour abréger cette opération, sans faire aucune réduction, il faut prendre pour numérateur de la fraction que l'on cherche le produit des numérateurs des fractions données, & pour dénominateur le produit des dénominateurs ; ainsi les fractions données étant $\frac{4}{5}$ & $\frac{2}{3}$, leur produit sera $\frac{8}{15}$. Il est facile de démontrer que cette opération est bonne.

Il ne faut que démontrer que la raison $\frac{8}{15}$ est égale à celle-ci $\frac{120}{225}$. Ce qui est clair ; car elles sont composées de raisons égales, puisque la raison de $\frac{8}{15}$ est composée de celle-ci $\frac{4}{5}$ & $\frac{2}{3}$, comme cette fraction $\frac{220}{125}$ est composée des fractions $\frac{12}{15}$ & $\frac{10}{15}$, qui sont les mêmes. Les raisons composées sont égales, lorsque les raisons composantes sont égales.

Ainsi pour multiplier $\frac{b}{c}$ par $\frac{m}{n}$, il faut écrire $\frac{bm}{cn}$

ONZIEME PROPOSITION.

Problême Onziéme.

Diviser une fraction par une fraction.

Dans toute division, on cherche la maniere 31.
dont le diviseur est contenu dans la grandeur à diviser, ou la raison du diviseur à la grandeur à diviser : car, comme nous avons vû, l'exposant de la raison de ces deux grandeurs est le quotient de la division de l'une par l'autre. Ainsi quand on propose de diviser une fraction par une autre fraction, on demande quelle est la raison de l'une à l'autre, & quel est l'exposant de cette raison.

Lorsque deux fractions ou raisons ont le même dénominateur ou même conséquent, il est évident qu'elles sont entr'elles comme leurs numérateurs. Par exemple, il est clair que $\frac{2}{4}$ est à $\frac{3}{4}$, comme 2 est à 3, ainsi dans ce cas il faut seulement placer le numérateur de l'une sur le numérateur de l'autre : cette fraction $\frac{2}{3}$ est l'exposant de ces deux fractions $\frac{2}{4}$ & $\frac{3}{4}$.

Si les deux fractions proposées ont différens noms, il faut les multiplier en croix, le numérateur de l'une par le dénominateur de l'autre, & le numérateur de celle-ci par le dénominateur de la premiere; puis divisant le produit fait du numérateur de la fraction à diviser, & du dénominateur de l'autre fraction, par l'autre produit, on aura le quotient de la division des fractions

proposées. Soient données ces deux fractions $\frac{b}{d}$ & $\frac{f}{g}$. Je multiplie b par g, & f par d, & je divise, comme il a été dit, le produit de b par g, par le produit de d par f, ce qui me donne $\frac{bg}{df}$, exposant de la raison des deux fractions proposées, ce que je démontre ainsi.

En multipliant b par g, & f par d, j'aurai ces deux produits df & bg; sous lesquels ayant placé le produit de d par g, les deux fractions proposées seront réduites à celles-ci qui ont le même nom $\frac{bg}{dg}$ & $\frac{df}{dg}$, dont l'exposant est $\frac{bg}{df}$, selon ce que nous venons de dire, que lorsque deux fractions ont le même nom, elles sont entr'elles comme leurs numérateurs. Or c'est ce qu'il falloit démontrer, sçavoir que $\frac{bg}{df}$ étoit l'exposant des deux fractions $\frac{b}{d}$ & $\frac{f}{g}$.

Selon cette méthode, pour diviser $\frac{3}{5}$ par $\frac{1}{6}$; & pour trouver l'exposant de la raison de ces deux fractions, je multiplie 3 par 6, ce qui fait 18, que je place sous une ligne, sous laquelle je mets le produit de 2 par 5, ce qui me donne $\frac{18}{10}$, qui est l'exposant de la raison de $\frac{3}{5}$ à $\frac{2}{6}$.

Lorsque le numérateur se peut diviser par le numérateur, & le dénominateur par le dénominateur, la chose est aisée. Ainsi ayant à diviser $\frac{6}{20}$ par $\frac{2}{5}$, les quotiens sont $\frac{3}{4}$, ce qui abrege,

& sur-tout pour les Grandeurs littérales, comme $\frac{acd}{bg}$ par $\frac{d}{g}$ vient $\frac{ac}{b}$. La raison est que la division défait ce que la multiplication a fait.

Il n'est pas nécessaire d'avertir ici que les opérations arithmétiques sur les fractions se prouvent de la même maniere que celles qu'on fait sur les entiers : sçavoir, l'Addition par la Soustraction, & réciproquement, comme aussi la Multiplication par la Division, & réciproquement ; cela s'entend assez de soi-même.

CHAPITRE II.

Des autres Opérations Arithmétiques sur les Fractions.

Problêmes curieux.

LEs autres Opérations de l'Arithmétique se font sur les fractions comme sur les grandeurs absolues ; ainsi il n'est pas nécessaire d'en parler. Ces Opérations ne consistent que dans certaines manieres d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions : c'est pourquoi lorsque l'on sçait ajouter ou soustraire, multiplier ou diviser des nombres rompus, on sçait les Regles de Trois, de Compagnie, & les autres Regles sur ces nombres. 32.

Les extractions des racines se font aussi de la même maniere sur les nombres rompus que sur les nombres entiers. Par exemple, pour tirer la racine quarrée de cette fraction $\frac{9}{25}$, je tire celle

du numérateur 9, qui est 3, celle du dénominateur 5, qui est 5, ce qui me donne cette fraction $\frac{3}{5}$, racine quarrée de $\frac{9}{25}$.

Ainsi $\frac{a}{b}$ est la racine quarrée de $\frac{aa}{bb}$; la racine cubique de $\frac{8}{27}$ est $\frac{2}{3}$; car celle de 8 est 2, & celle de 27 est 3. La racine cubique de $\frac{a^3}{b^3}$ est $\frac{a}{b}$.

Je proposerai ici quelques questions, où l'on verra l'usage des fractions, & la pratique de ce qu'on a enseigné. Remarquez dans ces questions une chose de la derniere importance, que la résolution d'une question dépend souvent de la seule maniere d'en expliquer les termes. Un nombre entier se rompt en tant de parties qu'on veut. Il faut choisir une fraction propre à résoudre la question, comme vous l'allez voir.

QUESTION PREMIERE.

33. *Le bassin d'une Fontaine a trois ouvertures; par la premiere l'eau s'écoule toute en trois heures; par la seconde en 5, & par la troisiéme en 6. On demande en combien de tems tout le bassin plein d'eau s'écouleroit, si on ouvroit en même tems toutes ses ouvertures.*

Selon que la question est proposée, toute l'eau s'écoulant en 3 heures par la premiere ouverture, il s'en écoulera $\frac{1}{3}$ par la même ouverture dans une heure; & pareillement il s'en écoulera $\frac{1}{5}$

dans une heure par la ſeconde ouverture, & $\frac{1}{6}$ par la troiſiéme ouverture, & par toutes trois enſemble il s'en écoulera $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ dans l'eſpace d'une heure. Toutes ces fractions ajoutées enſemble, ſelon les regles de l'addition, font $\frac{63}{90}$; laquelle fraction ſe réduit à celle-ci $\frac{9}{10}$ ſelon qu'il a été enſeigné, ſ. n. 24. Après quoi on peut raiſonner ainſi: Si $\frac{7}{10}$, c'eſt-à-dire 7 parties de l'eau telles que l'eau en vaut dix, ou bien ſi ſept dixiémes de toute l'eau s'écoulent dans une heure, dans combien de tems s'écouleront $\frac{10}{10}$ de cette eau; c'eſt-à-dire toute l'eau, ſelon ce qui a été dit dans le 1. & 2. Axiomes, ſ. n. 6. & 7. J'apperçois que ces termes $\frac{7}{10}$, 1 heure & $\frac{10}{10}$ ſont les trois premiers termes d'une proportion Géométrique, dont le tems qu'il faut pour écouler toute l'eau fait le quatriéme terme,

$$\frac{7}{10} . \ 1 . :: \frac{10}{10} .$$

En multipliant le troiſiéme terme de cette proportion par le ſecond, c'eſt-à-dire $\frac{10}{10}$ par 1, ce qui fait $\frac{10}{10}$, n. 30. car l'entier 1. réduit en fraction s'exprime ainſi $\frac{1}{1}$, ſ. n. 14. & diviſant ce produit

par le premier terme $\frac{7}{10}$ le quotient est $\frac{100}{70}$ qui étant réduit au moindre terme, $\tilde{s}$. n. 24. on a le quotient $\frac{10}{7}$, dont la valeur est égale à celle du grand $\frac{100}{70}$. Or la fraction $\frac{10}{7}$ est un entier plus $\frac{3}{7}$, selon ce qui a été remarqué, 2 Axiome, $\tilde{s}$. n. 7. Donc $\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$; & ainsi $1\frac{3}{7}$ sera le quatriéme terme de la proportion. $\frac{7}{10} 1 :: \frac{10}{10}. 1\frac{3}{7}$. C'est-à-dire, que toute l'eau s'écoulera par ces trois ouvertures dans une heure plus trois septiémes parties d'une heure. Si l'on veut avoir ce tems avec plus de précision, il faut évaluer la fraction $\frac{3}{7}$, comme on l'a enseigné, $\tilde{s}$. n. 26.

QUESTION SECONDE.

84. *La moitié d'une pique & un tiers sont dans l'eau, & deux pieds de cette pique sont hors de l'eau, quelle est la longueur de toute la pique.*

Je nomme x cette longueur. Ainsi $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2 = x$. Je réduis, selon la regle, $\tilde{s}$. n. 19. ces deux fractions à un même nom, à celles-ci $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$, que j'ajoute l'une avec l'autre, $\tilde{s}$. n. 28. ce qui fait $\frac{5}{6}$, ainsi $\frac{5}{6} + 2 = x$. Or $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = x$; car le dénominateur 6 est la valeur de tout x;

x ; ainsi $\frac{6}{0} = x$, donc $\frac{1}{6} = 2$; donc la Grandeur entiere x est un nombre dont 2 est la sixiéme partie ; partant, c'est le produit de 2 multiplié par 6, c'est-à-dire 12 ; cette pique est donc de 12 pieds.

QUESTION TROISIEME.

Achille va dix fois plus vîte qu'une tortue, cette tortue a une lieue d'avance. On demande quand Achille pourra l'attraper. 35.

Achille attrapera cette tortue à la premiere neuviéme de la seconde lieue ; car pendant qu'elle aura fait $\frac{1}{9}$ de cette seconde lieue, Achille doit avoir fait $\frac{10}{9}$, c'est-à-dire dix fois plus de chemin. Or $\frac{10}{9}$ valent une lieue entiere plus $\frac{1}{9}$ de lieue.

Ces espaces que parcourent la tortue font cette progression Géométrique $\div\!\div$ $1 . \frac{1}{10} . \frac{1}{100} . \frac{1}{1000}$. &c. Laquelle progression va toujours en diminuant. Ainsi, comme on l'a remarqué, Liv. III. n. 93. toutes ces dixiémes de dixiémes à l'infini ne font qu'une neuviéme de lieue.

QUESTION QUATRIEME.

Une horloge a deux aiguilles, l'une des heures, qui fait son tour en douze heures, & l'autre des minutes, qui fait le même tour en une heure. On demande que l'on marque tous les points ausquels ces deux aiguilles se rencontrent. 36.

Après chaque tour l'aiguille des minutes se trouve sur 12 heures. Ainsi après le premier tour l'aiguille des heures a l'intervalle d'une heure d'avance par-dessus celle des minutes, qui l'attrapera après la $\frac{1}{11}$ de deux heures; car dans le tems que l'aiguille des heures a fait $\frac{1}{11}$ d'une heure, l'aiguille des minutes, qui va douze fois plus vîte, doit avoir fait douze onziémes, $\frac{12}{11}$, c'est-à-dire, l'intervalle d'une heure entiere plus $\frac{1}{11}$ de cet intervalle: après le second tour, l'aiguille des heures aura d'avance l'intervalle de 2 heures; elle ne peut donc être attrapée qu'à la $\frac{2}{11}$ de l'intervalle qui est entre deux & trois heures; car pour lors l'aiguille des minutes allant toujours douze fois plus vîte, aura fait $\frac{24}{11}$, qui valent l'intervalle de deux heures plus $\frac{2}{11}$. Ainsi de suite ces aiguilles se rencontreront à ces heures, ci : I $+\frac{1}{11}$. II $+\frac{2}{11}$. III $+\frac{3}{11}$. IV $+\frac{4}{11}$. V $+\frac{5}{11}$. VI $+\frac{6}{11}$. VII $+\frac{7}{11}$. VIII $+\frac{8}{11}$. IX $+\frac{9}{11}$. X $+\frac{10}{11}$. Enfin les deux aiguilles se rencontreront à XI $+\frac{11}{11}$, c'est-à-dire à douze heures.

On peut ſe ſervir de cette méthode pour déterminer les conjonctions des Planettes lorſqu'on ſçait leur periode, ou le nombre des années dans lequel elles font leurs cours. On peut aſſigner les points du Ciel où les Planettes doivent ſe rencontrer.

QUESTION CINQUIEME.

Le mauvais Riche, brûlé de ſoif, pria Abraham de lui laiſſer diſtiller une goutte d'eau. Suppoſé que cette goutte eût fait la premiere minute 100 *lieues, la ſeconde* 99, *toujours ſelon cette même raiſon de* 100 *à* 99 : *Et qu'il y eût une diſtance infinie entre le mauvais Riche & Abraham : on demande en combien de tems cette goutte aura pu arriver juſqu'au mauvais Riche.* 37.

Le mouvement de cette goutte d'eau en deſcendant eſt retardé; car dans la premiere minute devant faire 100 lieues, & dans la ſeconde n'en faiſant que 99, ſon mouvement diminue ſelon cette même raiſon. Ainſi les eſpaces qu'elle parcourt ſont une progreſſion ſous-multiple, dont le premier terme eſt 100, le ſecond 99. On trouvera le troiſiéme terme, ſelon ce qui a été enſeigné, multipliant le ſecond terme 99 par lui-même, diviſant ſon produit par le premier, qui eſt 100, & le quotient $98\frac{1}{100}$ ſera ce troiſiéme terme qu'on cherche. On trouvera ainſi tous les autres termes qui iront en diminuant, cette progreſſion étant ſous-multiple. Le dernier terme n'étant donc pas une grandeur ſenſible, on le peut ſuppoſer égal à zéro.

Ainſi $\div$ 100. 99. $98\frac{1}{100}$. . . . . . . 0.

Et changeant cette progreſſion ſous-multiple en une multiple,

On a $\div$ o . . . . 98 $\frac{1}{100}$. 99. 100.

Soit donc *s* la ſomme de tous les termes qui précédent le dernier 100. Donc par le Corollaire, Liv. III. n. 91. 100—99. 99 :: 100—o. *ſ*. Or 100—99 n'eſt que 1, & 100—o c'eſt toujours 100; ainſi la proportion ſe réduit à 1. 99. :: 100. *s*. c'eſt-à-dire 1 eſt à 99 comme 100 eſt à la ſomme de tous les termes qui le précédent. Pour connoître cette ſomme, je multiplie (ſelon qu'il a été dit, Liv. III. n. 78.) le troiſiéme terme 100 par 99 le ſecond, & j'en diviſe le produit par le premier terme 1; le quotient 9900 de cette diviſion eſt le quatriéme terme valeur de *ſ*; en cette maniere 1. 99 :: 100. 9900. Ainſi donc 9900 eſt la ſomme de tous les termes qui précédent ce dernier terme 100, lequel étant ajouté à 9900, on a 10000, ſomme de toute la progreſſion. Donc je conclus que cette goutte d'eau faiſant la premiere minute 100 lieues, la ſeconde 99, & ainſi de ſuite juſqu'à zéro, ne fera dans toute l'éternité que 10000 lieues, & par conſéquent ne pourra jamais arriver juſqu'au lieu du mauvais Riche; puiſqu'on ſuppoſe qu'entre lui & Abraham il y avoit un eſpace infini.

SECTION TROISIEME.

Des différentes especes des Nombres rompus.

CHAPITRE PREMIER.

Des Fractions Décimales.

LEs Fractions peuvent prendre leur nom de la maniere que la grandeur entiere est divisée. On nomme, par exemple, Fractions Décimales, celles où l'entier est divisé en dix parties, & chacune de ces dix parties en dix autres, & ces dixiémes de dixiémes en autres dixiémes à l'infini ; leurs dénominateurs sont une progression Géométrique sous-multiple, dans laquelle regne la raison sous-décuple, comme vous le voyez. 38.

$$\div\!\div \frac{1}{10}\ \frac{1}{100}\ \frac{1}{1000}\ \frac{1}{10000}\ \frac{1}{100000}\ \&c.$$

Joignons à cette progression Géométrique la progression des nombres naturels, de sorte que le premier terme de l'une réponde au premier terme de l'autre : ainsi de suite.

÷	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
÷	1	2	3	4	5	6	7
∷	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
	10.	100.	1000.	10000.	100000.	1000000.	10000000.

Multipliant, par exemple, le 3^e terme *c* de la progression Géométrique par le 4^e. *d*, ce qui fait 10000000. Pour sçavoir quel terme c'est que ce produit de la progression Géométrique, j'ajoute C & *D*, l'une à l'autre, de la progression Arithmétique, ce qui me donne 7 pour 7^e terme; ainsi je connois que le produit 10000000 est le septiéme terme. Dans la progression Arithmétique on fait par addition, ce qu'on fait dans la Géométrie par la multiplication.

39. On joint toujours la progression Arithmétique à cette progression des Fractions Décimales; mais au lieu des chiffres de la progression des nombres naturels, on met des lignes de cette maniere.

$$10'.\ 100''.\ 1000'''.\ 10000''''.\ 100000''''',$$
$$1000000''''''.\ 10000000'''''''.$$

Ce qui fait qu'on leur donne des noms du nombre de ces petites lignes, ou de la valeur des termes de la progression Arithmétique, à laquelle ces fractions répondent. On les nomme donc *Primes*, *Secondes*, *Tierces*, *Quatriémes*, *Cinquiémes*, *Sixiémes*, *Septiémes*; ainsi de suite à l'infini, & selon ce qu'on a dit: multipliant des primes par des secondes 10' par 100'', ce qui fait 1000; pour sçavoir ce que c'est que ce produit, j'ajoute les lignes de dessus, les unes avec les autres', avec'', & cela fait''', ce qui me fait connoître que le produit des primes multipliées par des secondes sont des tierces. Qu'ainsi des tierces multipliées par des quatriémes sont des septiémes, puisque 3 & 4 font 7. De même une prime par une prime, 1' par 1', cela doit faire 1''. & 1'' par 1'' doit faire 1''''. Cela est évident; car

une prime c'est $\frac{1}{10}$: multipliant $\frac{1}{10}$ par $\frac{1}{10}$, cela fait $\frac{1}{100}$, s. n. 30. Ainsi une prime multipliée par une prime, doit valoir une seconde ; car $\frac{1}{100}$ c'est une seconde. Le produit est donc toujours de l'espece que donne l'addition des petites lignes. Ainsi encore une fois des tierces par des tierces donnent des sixiémes, les secondes par des quatriémes, $''$ par $''''$ donnent des sixiémes.

L'utilité des Fractions Décimales est très-grande ; parce que les opérations qu'on fait par leur moyen sont courtes. Pour réduire des entiers en primes, des primes en secondes, ou des secondes en des primes, & des primes en entiers, il n'est question que de multiplier ou diviser. Pour réduire des entiers en des primes, il faut les multiplier par 10 ; pour les réduire en des secondes, il faut les multiplier par 100, puisqu'un entier vaut 10 primes, ou 100 secondes. Or pour faire cette réduction, il faut seulement joindre les plus petits aux plus grands. L'on a 5 entiers $3'$ & $6''$; on veut réduire ces 5 entiers & ces primes en des secondes, j'écris $536''$; car pour faire cette réduction, il faut multiplier 5 par 100, c'est à-dire le faire valoir 100 fois davantage, en le faisant passer dans le rang des centaines, ce que j'ai fait en plaçant deux chiffres devant lui ; pour réduire $3'$ en secondes, il faut multiplier 3 par 10, ou le faire valoir 10 fois davantage, ce que je fais en plaçant un chiffre devant lui. 40.

Au contraire ; pour réduire de petites mesures

en de plus grandes, il faut les diviser par le nombre de leurs parties, qui est nécessaire pour faire la grandeur dont elles font partie. Pour réduire, par exemple, un nombre de primes en entiers, il faut le diviser par 10, ou, ce qui est la même chose, faire que ce nombre vaille 10 fois moins, ce qui se fait en retranchant un chiffre. Par exemple, pour réduire $53'$ en des entiers, je sépare 3 de 5; alors 5 ne vaudra pas cinq dixaines, mais cinq unités qui seront cinq entiers. Ainsi, si l'on propose de sçavoir combien $6782'''$ font de secondes, je retranche un chiffre, & j'apperçois que cela fait $678''$ plus $2'''$; si l'on demande combien c'est de primes, je retranche deux chiffres, & je vois que cela fait $67'$ plus $82'''$, ou $8''$ plus $2'''$; si enfin l'on me demande combien ce sont d'entiers, je retranche 3 chiffres, & j'apperçois que $6782'''$ font 6 entiers plus $782'''$, ou $7 + 8'' + 2'''$.

41. L'Addition & la Soustraction des Fractions décimales se font à l'ordinaire. On met les Fractions de même nom les unes sous les autres; les primes sous les primes, les secondes sous les secondes, les tierces sous les tierces, &c. Et on opere à l'ordinaire. Il suffit de jetter les yeux sur ces exemples.

ADDITION. *Ajouter* $\begin{cases} 5' & 6'' & 3''' \\ 0' & 7'' & 2''' \end{cases}$

somme $6'\ 3''\ 5'''$.

SOUSTRACTION. *de* $6.\ 4'\ 5''\ 0'''\ 7''''\ 5'''''$.

ôter $3.\ 6'\ 0''\ 8'''\ 2''''\ 3'''''$.

reste $2.\ 8'\ 4''\ 2'''\ 5''''\ 2'''''$.

Vous pourrez remarquer qu'on emprunte du terme précédent, quand celui qu'on veut ôter eſt plus grand que celui ſous lequel il eſt.

La multiplication & la diviſion ſe font auſſi facilement avec ces fractions décimales ; on multiplie les chiffres à l'ordinaire, les uns par les autres, & on ajoute dans une ſomme leurs petites barres, comme on l'a vû, ſ. n. 39. Ainſi pour multiplier 5 entiers $6'$ $3''$ $4'''$ par 8 entiers $2'$ $4''$ $6'''$, je réduis ces deux ſommes au même nom, écrivant ſimplement $5634'''$, & $8246'''$; après quoi je multiplie $5634'''$ par $8246'''$, dont le produit eſt $46457964''''''$, ſur lequel je mets$''''''$ qui eſt fait de l'addition de$'''$ & de$'''$, ou de 3 & de 3. Ainſi ce produit ſont des ſixiémes. 42.

La diviſion ſe fait en la même maniere. On diviſe les chiffres du dividende par les chiffres du diviſeur, & on ôte les barres du diviſeur du nombre de celles du dividende, on met les reſtes ſur le quotient. Ainſi des huitiémes diviſées par des cinquiémes donnent des troiſiémes, car de v$'''$ ôtant v reſte$'''$ ou 3. Si on veut donc diviſer $8'$ $6''$ $4'''$ par $2'$, je diviſe $864'''$ par $2'$, le quotient eſt $432''$, ſur lequel je mets$''$, ôtant$'$ de$'''$, dont le reſte eſt$''$. Pour diviſer 3 entiers $4'$ $4''$ $3'''$ $5''''$ $2'''''$ par $9'$ $6''$, il faut diviſer $344352'''''$ par $96''$, le quotient ſera $3587'''$, ſur lequel je mets trois petites lignes ; car de$'''''$ ôtez$''$ reſte$'''$.

Les diviſions & ſubdiviſions décimales ſont commodes, comme vous le voyez, parce que les opérations de l'Arithmétique en ſont faciles. Ainſi, autant qu'on le peut, il y faut rappeller les autres ſubdiviſions. Pour cela les toiſes dont ſe ſervent nos Ouvriers, étant diviſées d'un côté en ſix parties ou ſix pieds, cha- 43.

que pied en douze pouces, & chaque pouce en douze lignes. Il faut de l'autre côté marquer une division de la toise entiere en dix parties ; & de chaque dixiéme en d'autres dixiémes à l'infini. Ainsi en mesurant avec cette toise, on peut ne parler ni de pieds ni de pouces, ni de lignes, & au bout du calcul, évaluer les parties décimales, ce qui est aisé. Car pour sçavoir en pieds, en pouces & en lignes, ce que valent 8′ 9″, on raisonne ainsi ; si 10 primes ou cent secondes valent une toise ou six pieds, combien 8′ 9″ ou 89″ vaudront-elles ? ce que je trouve par la Regle de Trois, multipliant 89 par 6, & divisant le produit 534 par 100, le quotient $5 \frac{34}{100}$ fera connoître que 8′ 9″ valent 5 pieds quelque chose de plus. J'évalue cette fraction qui vaut 34 parties d'un pied divisé en 100 ; disant, si 100 donne 34, combien donneront douze pouces qui valent un pied entier, & partant ces 100 parties. Je multiplie 34 par 12, & j'en divise le produit 408 par 100 ; le quotient $4 \frac{8}{100}$ marquera que cette fraction $\frac{34}{100}$ d'un pied vaut 4 pouces plus $\frac{8}{100}$ de pouce ; ce qu'on pourra de même évaluer en lignes.

Si on vouloit sçavoir combien cinq pieds trois pouces valent de primes & de secondes, on le trouveroit de la même maniere, raisonnant ainsi : si six pieds valent une toise, & par conséquent dix primes, ou, ce qui est la même chose, si trois pieds valent cinq primes, combien cinq pieds vaudront-ils de primes.

CHAPITRE II.

De la réduction des Mesures & des Monnoies.

LEs grandes mesures se divisent ordinairement en de plus petites mesures. On peut nommer les nombres qui expriment les grandes mesures, des nombres entiers ; & nombres rompus ceux qui n'expriment que les petites. Nous avons enseigné ci-dessus les moyens de réduire toutes ces différentes mesures, & de donner aux plus grandes & aux plus petites le même nom, lorsqu'il est nécessaire de faire sur elles les opérations ordinaires de l'Arithmétique ; mais sans cette réduction, ces opérations se font aisément, en rangeant ces différentes mesures sous différentes colonnes, à qui on donne le nom de ces mesures, ainsi qu'on a vû que les chiffres ont différentes valeurs, selon le rang où la colonne dans lesquels ils sont placés. Les poids, les monnoies, sont des mesures qui se subdivisent. Les toises, par exemple, se subdivisent en pieds, les pieds en pouces, les pouces en lignes. Il y a de grandes & de petites monnoies. Il suffira, pour faire concevoir tout ce qu'il est nécessaire de sçavoir touchant les opérations sur ces subdivisions, de voir comme on peut faire une addition de différentes especes de monnoies. Si on avoit donc une addition à faire de plusieurs pistoles, de livres, sols, deniers, il faudroit ranger toutes ces différentes monnoies sous différentes colonnes, comme vous le voyez dans l'exemple suivant, & pratiquer la même chose que ce qu'on a fait sur les nombres ordinaires. 44.

Une pistole vaut 10 livres. Une livre vaut 20 sols. Un sol vaut 12 deniers. Ayant différentes sommes composées de pistoles, de livres, de sols, de deniers ; pour les ajouter dans une seule somme, il faut écrire chaque monnoie sous celle de même nom, mettant les deniers dans le premier rang de droite à gauche, après dans le second les sols, dans le troisiéme les livres, dans le quatriéme les Pistoles, de cette maniere.

5 pistoles.	*6 livres.*	*8 sols.*	*4 deniers.*
7	8	9	10
11	9	17	8
25	8	10	7
51	3	6	5

Je commence cette addition par le premier rang, dans lequel je trouve 29 deniers qui font 2 sols & 5 deniers ; je marque 5 sous ce rang, & je retiens 2 sols pour le rang suivant, lesquels avec ceux qui y sont, font 46 sols, qui valent 2 livres plus 6 sols. Je marque sous ce rang, & je retiens 2 livres. Dans le troisiéme rang, je trouve 31 livres, qui avec les deux livres que j'avois retenues, en font 33, qui valent 3 pistoles plus trois livres. Je ne marque donc que 3 sous ce rang ; & je réserve 3 pistoles, qui avec les 48 qui s'y trouvent, font 51 pistoles ; ainsi la somme de toutes ces sommes particulieres est 51 pistoles 3 livres 6 sols 5 deniers.

La soustraction se fait de la même maniere : il faut écrire les monnoies de même nom dans une même colonne, la plus petite somme sous la plus grande ; commençant par la premiere colonne de la droite à la gauche, il faut re-

trancher le plus petit du plus grand, & ce qui reste le placer dans le rang qui lui convient. Si dans les premieres colonnes il se trouve que ce qui est dessous est plus grand que ce qui est dessus, il faut emprunter de la colonne suivante. Ainsi voulant ôter trois pistoles six livres dix-huit sols dix deniers de cinq pistoles huit livres quinze sols six deniers, après avoir

5 pistoles.	*8 livres.*	*15 sols.*	*6 deniers.*
3	6	18	10
2	1	16	8

écrit ces deux sommes, je dis : on ne peut pas ôter dix deniers de 6 ; j'emprunte un sol de la colonne suivante, qui avec 6 fait 18 deniers, d'où je retranche 10 deniers, & le reste est.8. De 14 sols qui restent, je ne puis ôter 18 sols ; j'emprunte une livre, qui avec ces 14 fait 34 sols, d'où ayant ôté 18, reste 16 sols. De 7 livres retranchant 6 livres, reste 1. De 5 pistoles ôtez-en 3, reste 2. Ainsi après la soustraction, reste 2 pistoles, 1 livre, 16 sols, 8 deniers.

Ces deux exemples suffisent pour comprendre comment se doivent faire l'addition & la soustraction de plusieurs especes différentes, soit de monnoies, soit de mesures ; comme aussi sur les parties qu'on nomme Aliquotes, c'est-à-dire qui se trouvent exactement un certain nombre de fois dans une grandeur. On voit, par exemple, ce qu'on doit faire, s'il étoit question de faire une addition de tiers, de quarts, de cinquiémes, ou une soustraction ; il faut en

faire des colonnes, dont la derniere est celle des entiers ; ainsi, comme trois tiers font un entier, leur addition se doit mettre dans la colonne des entiers. Dans le calcul Astronomique que l'on compte par degrés, minutes, secondes. Un degré a soixante minutes, une minute soixante secondes, une seconde soixante tierces, ainsi de suite. Lorsqu'il s'agit de faire une addition de ces parties, il faut les ranger dans des colonnes, chacune dans celle de son nom, & ensuite opérer comme on a fait sur les monnoies.

Pour les autres opérations d'Arithmétique, il faut nécessairement réduire les différentes especes de mesures qu'on veut multiplier les unes par les autres, comme on l'a vû, *s. n.* 26. Cette réduction se fait par la multiplication : quand après cela on veut sçavoir quelles especes contient le produit de cette multiplication, si ce sont des mesures, combien ce produit contient, par exemple, de toises, de pieds, de pouces, de lignes, on divise ce poduit par les nombres qui marquent les raisons que ces parties ont entr'elles. On donne ces regles pour les réductions des monnoies, dont il est facile de découvrir le fondement en faisant ces opérations selon les regles ordinaires. Pour réduire les livres en sols, il faut ajouter un zéro, & doubler la somme. Pour réduire 40 livres en sols, je double cette somme, ce qui fait 80, & j'ajoute un zéro. Quarante livres valent 800 ; & pour réduire les sols en livres, il faut retrancher le dernier chiffre de droite à gauche, & prendre la moitié du reste, & ce qui reste sont des livres. Pour réduire 857 sols en livres,

je retranche le dernier chiffre 7, & je prends la moitié de 85 ou de 84, ce qui me fait connoitre que 857 sols valent 42 livres 17 sols. Pour réduire les sols en deniers, il faut multiplier les sols par 4 & par 3, ou quadrupler & tripler la somme. Ainsi pour réduire 42 sols en deniers, je multiplie 42 par 4, ce qui fait 168; & 168 par 3, ce qui fait 504; c'est le nombre de deniers que valent 42 sols. Pour réduire les deniers en sols, il faut prendre le tiers & le quart. Ainsi le tiers de 504, qui est 168, & le quart de ce tiers qui est 42, est le nombre de sols que valent 504 deniers. En faisant ces réductions tout au long, on voit le fondement de ces regles.

CHAPITRE III.

De l'aproximation des racines des puissances imparfaites; ou de l'expression (à peu près) en nombres rompus, de ce qu'on ne peut pas exprimer avec des nombres entiers.

JE prouverai dans le livre suivant, qu'on ne 45.
peut exprimer par aucun nombre, soit entier, soit rompu, la racine d'une puissance imparfaite: que, par exemple, ce nombre 18, qui n'est pas un nombre quarré, ne peut avoir une racine qui se puisse exprimer avec quelque nombre, même rompu. Or ce qu'on ne peut pas faire exactement, se peut faire à peu près. Pour cela il faut rompre l'entier, & le réduire en fractions. Si, par exemple, ce nombre 18 est proposé

pour en extraire la racine, qui soit à peu près celle de 18, qui est un nombre de pieds; il faut réduire ces pieds en pouces. Chaque pied vaut en longueur 12 pouces, mais un pied quarré vaut 144 pouces; il faut donc multiplier 18 par 144, le produit est 2592, auquel un quarré de 18 pieds est égal. Ensuite il faut prendre la racine quarrée de ce produit; mais on n'en trouvera pas d'exacte: pour en approcher de plus près, il faut réduire l'entier 18 en fractions décimales, lesquelles peuvent être continuées à l'infini. Enfin on peut trouver une fraction qui, multipliée par elle-même, fasse ce nombre 18 avec si peu de différence, que cela ne soit pas sensible. J'ajoute à 18 deux zéro, cela fait 1800 primes quarrées, qui ne valent que dix-huit entiers quarrés, ayant partagé ce nombre par tranche, & pris la racine du quar-

2			
$\cancel{18}$	00	}	4
	82		

ré de la derniere tranche, qui est 16, dont la racine est 4, il faut doubler cette racine trouvée, comme il a été enseigné, le double de 4 est 8, par lequel je divise 20, le quotient est 2, qui sera le second chiffre de la racine du nombre donné, & que j'écris après le diviseur 8. Ensuite ayant multiplié 82 par 2, ce qui fait 164, & ôté ce produit de 200, reste 36.

$\cancel{2}$	36	}	42'
	$\cancel{00}$		
	$\cancel{82}$		

Ainſi je ſçai que 42 primes, ou 4 entiers plus 2 primes, ſont la racine de 18 ; mais cette racine n'eſt pas juſte, puiſqu'il s'en faut 36 primes qu'elle ne faſſe 18 entiers.

Pour avoir encore une racine plus exacte, il faut réduire ce reſte en des ſecondes quarrées, en plaçant devant le reſte 36 deux zéro.

```
  2 | 2 4  \
 3̸6̸ | 0̸0̸   > 424"
  8̸ | 4̸4̸  /
```

Enſuite il faut doubler les racines trouvées 42, ce qui fait 84, & diviſer 3600 par ce double, le quotient de cette diviſion eſt 4, qui eſt le troiſiéme caractere de la racine cherchée, que je marque aprés les deux premieres que j'ai déja trouvées : je multiplie 844 par ce dernier caractere 4, ce qui fait 3376, que j'ôte de 3600, & reſte 224 ; ainſi cette racine 424" n'eſt pas encore la juſte racine de 18 ; car il s'en faut 224 ſecondes qu'elle ne faſſe 18 ; c'eſt pourquoi ſi on en veut trouver une plus exacte, il faut continuer cette opération, ſans eſpérance, comme nous le ferons voir dans le Livre ſuivant, qu'on puiſſe trouver une racine entierement préciſe du nombre non quarré, qui a été propoſé, & de tout autre nombre qui n'eſt pas quarré : mais vous voyez que le moyen que nous avons donné eſt exact, puiſqu'on connoît de combien on eſt éloigné du terme où l'on doit aller.

Ce qui eſt merveilleux, c'eſt qu'on peut augmenter juſqu'à l'infini ce nombre 4, qui eſt la racine du quarré 16, qui eſt le nombre quarré qui approche le plus de 18, ſans que cette addi-

tion augmente cette racine 4 du nombre entier; ce que nous démontrerons ainsi.

9 primes, 9 secondes, 9 tierces, & tous les autres nombres rompus de suite ajoutés ensemble, quand il y en auroit une infinité, ne peuvent faire une unité d'un nombre entier. Car afin que ce qu'on ajoute à 9 secondes fasse 10 secondes, il faudroit que cette addition valût 10 tierces; puisqu'une seconde vaut 10 tierces: ainsi 9 tierces avec 9 secondes ne peuvent pas faire 10 secondes. Or afin que ce qu'on ajoute à 9 primes valût 10 primes, & par conséquent un entier, il faudroit que cette addition valût 10 secondes; ce qui n'est pas. On a vû que 9 tierces avec 9 secondes ne peuvent valoir 10 secondes; ainsi 9′ 9″ 9‴. ajoutées ensemble, ne peuvent valoir 10 primes, ni par conséquent un entier. Cette même démonstration prouve que 9′ 9″ 9‴ ne peuvent faire un entier, & ainsi à l'infini. D'un autre côté 9′ 9″ 9‴ valent bien plus que 9 simples primes: ainsi vous voyez comme l'on peut augmenter ce même nombre 9 primes de plus en plus, sans cependant venir jusqu'à 10 primes; ce qui surprend ceux qui n'ont jamais fait réflexion sur la divisibilité indéfinie de tout ce qui est grand.

On peut en la même maniere extraire la racine cubique des nombres qui ne sont pas cubes autant que cela se peut faire. Il faut réduire le nombre donné ou en primes, ou en secondes, ou en tierces, selon qu'on veut avoir une racine plus précise. Soit donné ce nombre non cube 30: le cube qui approche le plus de 30 est 27, dont la racine cubique est 3; de 30 ôtant 27, reste 3. Pour avoir une racine plus précise de ce nombre

il faut le réduire en primes ; un entier qui est cube vaut 1000 primes ; car un entier vaut dix primes : or 10 multipliés par 10 font 100, & 100 multipliés par 10 font 1000 ; donc pour réduire les 30 entiers donnés en primes, il ne faut qu'écrire de suite trois zéros ; ainsi 30000. Il faut extraire la racine cube de ce nombre 30000 par les Regles ordinaires, 1°. le coupant par tranches, comme il a été enseigné.

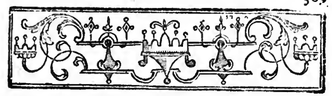
	20		
3	310		
30	000		31.

2°. Il faut extraire la racine du cube de la derniere tranche : cette racine est 3, dont le cube est 27, que j'ôte de 30, le reste est 3. Selon les regles, je prends le quarré de 3 que je viens de trouver, ce quarré est 9 que je triple, le triple est 27, par lequel je divise 30, le quotient est 1, que je marque après la premiere racine trouvée 3. De 30 j'ôte 27, reste 3 : je prends le quarre de 1 qui est 1, je le multiplie par 9 triple de 3, dernier chiffre de la racine. Je retranche le produit qui est 9 de 30, il reste 21 ; j'ôte de 210 le cube de 1 qui est 1, il reste 209. Ainsi je connois que la racine cube de 30 est 31 primes. Mais cette racine n'est pas précise, puisqu'il s'en faut 209 que 31 primes multipliées cubiquement fassent 30 entiers. Pour avoir donc une racine plus exacte, il faut réduire le nombre proposé en des secondes ; & puisque les primes cubiques valent 1000 fois davantage que les secondes qui ne sont point figurées, il faut encore ajouter trois zéros après les primes qui restoient, sçavoir après 209 ; ainsi

209000. Enſuite il faut extraire la racine cube de ce nombre, commençant par le trancher, comme il a été enſeigné.

209 | 000 (300″

Selon la Regle, je prends le quarré de 31, qui eſt 961, que je triple, ce qui fait 2883, par lequel nombre ne pouvant diviſer 2090, j'écris zéro après les racines trouvées. Je ſçai ainſi que la racine cube de 30 eſt 310 ſecondes, mais cette racine n'eſt point encore exacte; c'eſt pourquoi ſi j'en veux avoir une qui approche encore plus de la véritable racine de 30, je dois réduire ces ſecondes en tierces, & continuer la même opération.



ELEMENS DES MATHEMATIQUES, OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GÉNÉRAL.

LIVRE SIXIEME.

Des Grandeurs incommensurables.

SECTION PREMIERE.

Ce que c'est que la Commensurabilité & incommensurabilité des Grandeurs. Des nombres, pairs, impairs, premiers, quarrés, cubes, &c.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'est que Grandeur incommensurable.

EN parlant des Raisons, nous avons vû qu'on disoit qu'une Raison étoit *sourde* lorsqu'elle ne se pouvoit exprimer avec des nombres, c'est-à-dire, lorsqu'on ne pouvoit pas marquer exacte- I.

ment combien l'un des termes de cette Raison contenoit de fois, ou étoit contenu dans l'autre : par exemple, s'il y étoit ou une fois, ou deux fois, ou trois fois, &c. Les nombres ne sont proprement que des Raisons. Lorsqu'il s'agit de nombrer plusieurs choses, l'on en prend ou l'on en conçoit une qui est bien connue, qu'on établit pour l'unité ou pour la commune mesure, ainsi qu'on l'a déja remarqué. Ensuite comparant avec cette commune mesure toutes les autres choses qu'on veut nombrer, selon le rapport qu'on trouve qu'elles ont avec elle, on leur donne différens noms ; on les appelle deux, trois, quatre, &c. Les nombres ne sont ainsi que des rapports connus ; par exemple, ce nombre 7 est le rapport qu'il y a entre deux choses, dont on sçait que l'une étant répétée tant de fois, mesure précisément l'autre.

L'unité est donc comme la mesure dont on se sert pour mesurer. Ainsi l'on dit que plusieurs Grandeurs sont commensurables, ou qu'elles peuvent être mesurées par une même mesure, lorsqu'on peut assigner une certaine quantité qui se rencontre exactement tant de fois dans chacune. Que si cela n'arrive pas, ces Grandeurs sont incommensurables. Les Grandeurs qui n'ont entre elles qu'une raison sourde sont donc incommensurables, puisqu'on ne les peut exprimer par nombres ; ou qu'il n'y a aucune certaine quantité, qui, étant prise pour l'unité, les puisse mesurer exactement sans reste, & qu'il y manque quelque chose ou qu'il y a de l'excès.

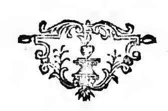
Il est très-important de remarquer ici que les hommes ne conçoivent jamais clairement une chose, quand ils n'y sont point accoutumés, à moins qu'on ne leur fasse appercevoir qu'elle a un rapport exact avec les choses qui leur sont familieres. Or toutes

les choses ne sont point commensurables. Il est bon de s'en convaincre, & de bien remarquer qu'on ne doit pas toujours prendre pour regle ce qu'on connoît, parce qu'il se peut faire que ce qu'on propose est d'un autre ordre. Ceux qui veulent tout rapporter au corps jugent mal de la nature de l'ame; & ceux qui rapportent tout aux choses créées & finies, comme sont l'ame & le corps, jugent mal de Dieu, de ce qu'il est, & de la Trinité des personnes qui est en Dieu; les esprits & les corps n'étant pas commensurables, ni Dieu avec ses créatures.

Pour concevoir comment il y a des Grandeurs incommensurables, considérons qu'avec une toise, qui est une mesure de six pieds, on ne peut mesurer exactement une longueur qui a moins de six pieds, ou qui en a plus, mais qui n'en a pas douze; car alors deux fois la toise feroit cette longueur de douze pieds. Si cette longueur a tant de pieds, & outre cela quelque chose de plus ou de moins qu'un pied, une mesure d'un pied ne pourra pas encore mesurer cette longueur exactement, quoique le pied le fasse plus exactement que la toise; car ce qui reste à mesurer est plus petit. Si on prend pour mesure un pouce, qui est la douziéme partie d'un pied, & que la longueur qu'on veut mesurer ait tant de pouces, mais outre cela quelque chose de plus ou de moins, vous voyez que le pouce ne sera pas encore une mesure exacte, & que le pouce & cette longueur ne sont pas commensurables. Que si on continue à prendre des mesures toujours plus petites que le pouce; par exemple, qu'on prenne la douziéme partie d'un pouce, qui est une ligne, & qu'on ne trouve point de mesure exacte, quoique l'on pousse la chose à l'infini, alors cette longueur est censée incommensurable avec toutes les Grandeurs que

nous connoissons. Je dis, si cela arrive, car je ne le puis pas démontrer encore comme je le fera dans la suite. Or si cela est, il est évident que cela vient de la divisibilité de la Grandeur à l'infini; car enfin, si les Grandeurs avoient des parties indivisibles, ces dernieres parties seroient des mesures communes.

Ces réflexions sur l'incommensurabilité de certaines Grandeurs, sont de la derniere importance pour se convaincre de cette vérité, d'un si grand usage dans la Religion, qu'il y a des choses de fait constantes, qui sont incompréhensibles. Nous connoissons plusieurs vérités touchant les Grandeurs incommensurables également certaines & cachées, qu'on ne comprend point; ce qui nous apprend que quoique les mysteres soient incompréhensibles, & qu'on n'en ait point d'idée parfaite, néanmoins on en peut croire & démontrer plusieurs choses. Mais en meme tems que cette matiere nous fait connoître les bornes de l'esprit de l'homme, elle nous en doit faire concevoir la vaste étendue, & sa grande pénétration qui lui fait découvrir tant de choses dans ce qui de soi-même est tellement caché, qu'on ne peut connoître ce qu'il est véritablement.



CHAPITRE

Chapitre II.

Préparations pour connoître si les Grandeurs sont commensurables ou incommensurables. 2.

C'Est particulierement l'extraction des racines des Puissances imparfaites, qui fait paroître l'incommensurabilité. On nomme parfaite une puissance qui se peut exprimer par un nombre quarré, par un nombre cube. Un nombre est quarré ou cube qui a un nombre pour racine. Ainsi il s'agit ici particuliérement de donner des regles pour connoître quand des puissances sont parfaites, quand ce sont des nombres quarrés ou cubes; ce qui nous oblige de parler de ces nombres, & pour cela, de dire encore quelque chose touchant la nature des nombres en général.

L'unité est ce qui peut être conçu comme une seule chose. 3.

Le nombre est une multitude composée d'unités. 4.

Nombre pair est celui qui se peut diviser en deux nombres égaux.

Tels sont 6 & 10, qui ont pour moitié, l'un 3, & l'autre 5. 5.

Nombre impair est celui qui ne peut être divisé en deux nombres égaux, ou qui differe d'avec le nombre pair qui le précede, ou qui le suit immédiatement, de l'unité. 6.

Ce nombre 9 est impair, on ne le peut pas diviser en deux nombres égaux: sa différence d'avec 8 & avec 10, qui sont des nombres pairs, est l'unité. Dans ce nombre impair & dans tout autre qui

soit aussi impair, il est évident qu'en en retranchant ou lui ajoutant l'unité, il devient pair; comme au contraire ajoutant ou retranchant d'un nombre pair l'unité, il devient impair. On dit d'un nombre pair, qu'il est pairement pair, lorsque sa moitié est un nombre pair. Ainsi 12 est pairement pair, parce que 6 est un nombre pair; mais 10 est imparfaitement pair, car 5 est impair.

7. *Nombre premier est celui qui n'a point d'autre mesure que l'unité.*

C'est-à dire, qu'il n'y a point d'autre nombre que l'unité qui le puisse mesurer exactement, étant répété tant de fois. Ces nombres 2. 3. 5. 7. sont des nombres premiers.

8. *Les nombres sont premiers entr'eux qui n'ont que l'unité pour leur commune mesure.*

Ces nombres 4 & 7 sont premiers entr'eux, car il n'y a que l'unité qui puisse être leur mesure commune. Ces nombres 18 & 6 ne sont pas nombres premiers entr'eux; car outre l'unité, ils peuvent être mesurés par ces nombres 2. & 3. On a dit que les plus petits nombres qui expriment une raison, sont les exposans de cette raison; ainsi les exposans d'une raison sont nombres premiers entr'eux.

On a déja vû que les nombres reçoivent différens noms, selon qu'on les conçoit faits de la multiplication d'autres nombres. Généralement on appelle *nombre plan*, celui qui est fait de la multiplication de deux nombres, *Solide*, celui qui est fait de la multiplication de trois nombres, Un nombre est dit quarré, lorsqu'il est fait de la multiplication d'un nombre par lui-même, lequel est appellé *Racine quarrée* de ce nombre. Ainsi 16 qui est fait de 4, multiplié par 4, est un nombre quarré, dont 4 est la racine quarrée. Un nombre

cubique est fait de la multiplication d'un nombre multiplié deux fois par lui-même, qui se nomme *Racine cube* de ce nombre cubique. Le nombre 27 qui est fait de 3, multiplié premierement par lui-même, ce qui fait 9, & de ce produit par le nombre 3, ce qui fait 27, est un nombre cubique, dont 3 est la racine cubique.

Lorsqu'un nombre n'est ni quarré ni cube, & qu'ainsi on ne connoît point de nombre, ou qu'il n'y en a point, comme on le démontrera, qui puisse être sa racine; alors pour exprimer cette racine, on met devant le nombre, dont elle est racine, ce signe $\surd$, qu'on appelle *Signe radical*, parce qu'il sert à marquer les racines.

Quand la grandeur devant laquelle on le met est complexe, c'est-à-dire, composée de deux ou plusieurs grandeurs, jointes par le signe + ou —, si c'est la racine de toute la grandeur complexe, qu'on veut marquer, on allonge une des jambes du signe radical, pour qu'il comprenne toute la grandeur. Ainsi $\sqrt{xx+aa}$, & cela s'appelle une racine universelle.

Autrefois on mettoit après le signe radical la premiere lettre de la puissance dont ce signe marquoit la racine. Ainsi $\surd Q$, si c'étoit une racine quarrée. $\surd C$, si c'étoit une racine cube. $\surd QQ$, si c'étoit une racine de quarré quarré; comme $\surd QC$, si c'étoit une racine d'un quarré cube.

Maintenant on met dans le signe radical l'exposant de la puissance dont il marque la racine; ainsi $\sqrt[2]{}$, au lieu de $\surd Q$, pour dire que c'est une racine quarrée. Quand on voit ce signe seul, il faut suppléer l'exposant de la seconde puissance, qui est 2. On exprime ainsi les autres racines, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[6]{}$,

Ces nombres qui sont dans le signe radical, sont les exposans des puissances.

LEMME.

9. *Toute puissance doit être censée nombre quarré ou cube, &c. lorsque sa racine est égale à un nombre.*

Si x racine de x^2, de x^3, de x^4, est égal à un nombre, x^2 doit être égal à un nombre quarré, x^3 à un nombre cube; car ce nombre auquel x est égal, multiplié quarrément, sera égal à x^2; multiplié cubiquement, sera égal à x^3.

PROPOSITION PREMIERE.

Théorême Premier.

10. *Un nombre quarré multipliant un nombre qui n'est pas quarré, le produit ne sera pas un nombre quarré.*

Soit 18 nombre non quarré multiplié par le quarré de 2 qui est 4, le produit 72 ne sera pas quarré. Soit $18 = xx$ & $aa = 4$, le produit de 18 par 4 est 72, comme celui de xx par aa est $xaxa$, ainsi $xaxa = 72$, & $xa = \sqrt{72}$. Si donc 72 étoit un nombre quarré, il auroit une racine qui se pourroit exprimer en nombre, c'est-à-dire, que xa seroit égal à un nombre. Or connoissant une des racines de ce nombre xa, sçavoir a qui est 2, on connoît la seconde, sçavoir x: par conséquent xx ou 18 seroit un nombre quarré, ce qui est faux. Il ne se peut donc pas faire que le produit d'un nombre non quarré, multiplié par un nombre quarré, soit nombre quarré; mais prenez garde que deux nombres qui ne sont pas quarrés peuvent

en se multipliant produire un nombre quarré. Car 3 & 12 ne sont pas des nombres quarrés, mais le produit de leur multiplication 36, est un nombre quarré.

Seconde Proposition.

Théorême second.

Le produit de deux nombres quarrés est toujours un nombre quarré qui a pour sa racine un plan fait des deux racines de ces deux nombres quarrés. 11.

Soient donnés ces deux nombres quarrés 4 & 16, dont le produit est 64. 1°. Il faut démontrer que ce produit est un nombre quarré. Soit $aa=4$, & $bb=16$, aa étant multiplié par bb, cela fait $aabb=64$. La racine quarrée de $aabb$ est ab, égale à celle de 64. Or la valeur de ab est connue; car a est égal à la racine de 4, qui est 2, & b est égal à 4, racine de 16. Donc ab est égal au produit de 2 & de 4, qui est 8. Ainsi la racine de 64 se pouvant exprimer par nombre, il faut conclure par le Lemme précédent, que 64 est un nombre quarré.

2°. Il est manifeste que la racine ab du quarré $aabb$ est le produit de a & de b, qui sont les racines des quarrés aa & bb, ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

Donc un nombre quarré, multiplié par lui-même, produit un nombre quarré. 12.

Car le produit de cette multiplication est fait par deux nombres quarrés. Ainsi 4 par 4 fait 16, qui est un nombre quarré.

TROISIEME PROPOSITION.

Théorême Troisiéme.

13. *Deux raisons de nombre à nombre étant égales, le produit des antécédens, & le produit des conséquens, sont entre eux comme deux nombres quarrés.*

Soient *a. b* :: *c. d.* La raison de *a* à *b* est de nombre à nombre, comme aussi celle de *c* à *d*. Il faut prouver que *ac* est à *bd* comme deux nombres quarrés. Ainsi *a*=12, *b*=24, *c*=8, *d*=16, il faut prouver que 12×8, ou 96 est à 24×16, ou 384, comme deux nombres quarrés.

Ces deux Raisons étant égales, elles ont les mêmes exposans. Ainsi en les réduisant aux moindres termes, on les réduit à ces nombres 1. 2 :: 1. 2. Les deux antécédens de ces deux Raisons sont un même nombre, & les deux conséquens sont aussi un même nombre; ainsi par la définition des nombres quarrés, le produit 1 des antécédens, & 4 produit des conséquens, seront des nombres quarrés. Les raisons composées de raisons égales sont égales: Donc *ac* ou 96 est à *bd*. ou à 384, comme 1 à 4, & par conséquent comme deux nombres quarrés; ce qu'il falloit démontrer.

QUATRIEME PROPOSITION.

Théorême Quatriéme.

14. *Le produit de deux nombres plans semblables, c'est-à dire, dont les racines sont proportionnelles, est un nombre quarré.*

Soient ces deux nombres plans 8 & 18, les racines du premier sont 2 & 4, celles du second sont 3 & 6. Ces quatre racines sont en proportion, 2. 3 :: 4. 6. Donc par la Proposition précédente, les plans 8 & 18 faits de ces racines, sont entr'eux comme deux nombres quarrés, sçavoir, 4 & 9, qui sont les quarrés des moindres termes 2 & 3, auxquels peuvent être réduites les deux raisons égales des plans proposés : ainsi 8. 18 :: 4. 9; par conséquent 8. 4 :: 18. 9.

Par la même raison le produit 144 des antécédens 8 & 18, est à 36, produit des conséquens quarrés 4 & 9, comme deux nombres quarrés, sçavoir, comme 4 est à 1, qui sont les quarrés des moindres termes, auxquels les raisons de 8 à 4, & de 18 à 9, peuvent être réduites : Ainsi,

144. 36 :: 4. 1.

Lorsque les quarrés sont en proportion, leurs racines sont proportionnelles; Liv. IV. n. 29. Donc $\sqrt{144}$. $\sqrt{36}$ :: $\sqrt{4}$. $\sqrt{1}$. Ainsi la raison de la racine 36 à celle de 144 est connue, puisqu'elle est égale à celle qui est entre la racine de 1, & celle de 4 qui est 2. Le produit 36, fait par les nombres quarrés 4 & 9, est un nombre quarré, s̃. n. 11. Donc la racine de 144 ayant une raison connue à un nombre connu; qui est la racine quarrée du nombre quarré 36, par le Lemme cidessus proposé, ce nombre 144, qui est le produit de 8 & de 18, sera un nombre quarré; ce qu'il falloit démontrer.

Proposition Cinquieme.

Cinquiéme Théorême.

15. *Le produit de deux nombres cubiques est un nombre cubique.*

Soient ces deux nombres cubiques 8 & 27, la racine de 8 est 2, celle de 27 est 3. Je nomme *aaa* le nombre 8, & *bbb* le nombre 27. Le produit de 8 par 27 est 216, égal par conséquent à cette grandeur *aaabbb*, produit de *aaa* par *bbb*. La racine cubique de ce produit est *ab*. Or puisque *a* est égal à 2, & *b* égal à 3, donc *ab* est égal à 6. Ainsi la racine cubique du produit 216, qui est égal à la grandeur *aaabbb*, est 6; par conséquent ce nombre est cubique; ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

16. *Donc un nombre cubique multiplié par lui-même produit un nombre cubique.*

Car le produit de cette multiplication est fait par deux nombres cubiques. Ainsi 8 par 8 fait 64, qui est un nombre cubique.

Sixiéme Proposition.

Théorême Sixiéme.

17. *Trois raisons de nombre à nombre étant égales, le produit des trois ancécédens sera au produit des trois conséquens comme deux nombres cubiques.*

Soient *b. c* :: *f. g* :: *h. l.* le produit des antécédens de ces raisons est *bfh*, & celui des conséquens est *cgl*; il faut démontrer que *bfh* est à *cgl*,

comme un nombre cubique est à un autre nombre cubique.

La raison de b à c a pour exposans ces deux nombres 2, 3; donc les trois raisons données étant égales, elles auront pour exposans les mêmes nombres 2. 3 :: 2. 3 :: 2. 3. Ainsi les trois antécédens de ces nombres sont trois mêmes nombres, & les trois conséquens trois mêmes nombres; donc par la définition des nombres cubiques, le produit des antécédens, qui est 8, & le produit des conséquens, qui est 27, seront deux nombres cubiques. La raison de 8 à 27 est composée des mêmes raisons dont la raison de bfh à cgl est composée: donc ces deux produits bfh & cgl seront entr'eux comme 8 est à 27. Or ces deux nombres sont cubiques; donc bfh est à cgl, comme un nombre cubique est à un autre nombre cubique; ce qu'il falloit prouver.

Septieme Proposition.

Théorême Septiéme.

Le produit de deux nombres solides semblables, c'est-à-dire, dont les racines sont proportionnelles, est un nombre cube. 18.

Cela se démontre de la même maniere qu'on a prouvé que le produit de deux plans semblables est un nombre quarré.

Avertissement.

De ce que nous avons démontré touchant les secondes & troisiémes puissances, il suit clairement que le produit de deux puissances numériques d'un même dégré est un nombre de la même puissance,

par exemple, qu'un nombre quarré de quarré, multiplié par un nombre quarré de quarré, produit un nombre quarré de quarré. Que si quatre raisons de nombre à nombre sont égales, le produit des antécédens est à celui des conséquens, comme deux nombres quarrés de quarrés : ainsi des cinquiémes, sixiémes puissances numériques à l'infini.

Il faut se souvenir ici que dans le langage des anciens Géometres, le quarré est la premiere puissance, & le cube la seconde. Nous avons vû les raisons que les nouveaux Géometres ont eu de changer ce langage.

SECTION SECONDE.

Regle pour connoître si des Grandeurs proposées sont commensurables ou incommensurables.

AVERTISSEMENT.

J'Abrege, autant que je le puis, cette doctrine de la commensurabilité & incommensurabilité, parce qu'il suffit dans les Elemens d'en donner les principes généraux. Je ne parle ici que de ce qui peut être commun à toutes sortes de grandeurs. Je ne touche point à ce qui appartient à la Géométrie.

DEFINITIONS.

Premiere Definition.

Deux Grandeurs sont commensurables, lorsque la raison qui est entr'elles se peut exprimer par nombre; incommensurables, si cette raison est sourde. 19.

Seconde Definition.

Si deux Grandeurs n'étant pas comme nombre à nombre, leurs quarrés ou leurs cubes sont comme nombre à nombre, on dit alors que ces Grandeurs sont incommensurables en elles-mêmes, mais qu'elles sont commensurables en puissance. 20.

Si $xx = 18$ & $aa = 25$. La racine de 18 ou de xx, qui est x, est incommensurable avec a racine de aa; mais ces racines qui sont incommensurables en elles-mêmes, sont commensurables en puissance, puisque $xx. aa. :: 18. 25$.

Demande.

Si un nombre mesure une certaine grandeur; toute autre grandeur qui lui est incommensurable est aussi incommensurable avec ce nombre. 21.

Soit 3 commensurable avec 12, avec lequel x est incommensurable: je dis que 3 & x sont incommensurables; car si x étoit un certain nombre de fois dans 12, ou 12 dans x, il est évident que 3 seroit aussi en x d'une maniere qui s'exprimeroit par nombre.

PROPOSITION HUITIEME.

Huitiéme Théorême.

22. *La raison doublée ou triplée d'une raison de nombre à nombre, est aussi une raison de nombre à nombre, qui a pour ses exposans des nombres quarrés, si elle est doublée, & des nombres cubiques, si elle est triplée.*

La raison doublée est une raison composée de deux raisons égales, dont les antécédens ont été multipliés l'un par l'autre, & les conséquens de la même maniere l'un par l'autre; par conséquent, s. n. 13. ces deux produits qui sont les termes de la raison doublée, sont entr'eux comme deux nombres quarrés; ainsi cette raison a pour ses exposans des nombres quarrés.

Une raison triplée est composée de trois raisons égales; ainsi les termes de cette raison triplée sont entr'eux comme deux nombres cubiques, s. n. 17. & cette raison a pour ses exposans des nombres cubiques; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION NEUVIEME.

Neuviéme Théorême.

23. *Une raison simple est sourde, si la raison doublée ou triplée de cette raison n'a pas pour ses exposans des nombres quarrés ou cubiques.*

Si xx n'est pas à zz comme des nombres quarrés, & xxx à zzz comme des nombres cubiques, je dis que la raison de x à z est une raison sourde;

car si elle est de nombre à nombre, il faut par la proposition précédente, que xx soit à zz, ou xxx à zzz, comme nombre à nombre, & que la raison de xx à zz ait des nombres quarrés pour ses exposans, & la raison de xxx à zzz des nombres cubiques. Or par l'hypothese cela n'est point ; il est donc impossible que la raison de x à z soit une raison de nombre à nombre.

DIXIEME PROPOSITION.

Théorême Dixiéme.

Trois Grandeurs étant continuellement proportionnelles, la raison de la premiere à la troisiéme ne peut être que de trois sortes. 243

1°. *Ou de nombre à nombre, ayant pour ses exposans des nombres quarrés.*

2°. *Ou de nombre à nombre, n'ayant pas pour ses exposans des nombres quarrés.*

3°. *Ou sourde, & non de nombre à nombre.*

Premier Cas.

Si la raison de la premiere Grandeur à la troisiéme est une raison de nombre à nombre, qui a pour ses exposans des nombres quarrés, ces trois Grandeurs sont commensurables.

Soient $\div\!\div$ *b. c. d.* trois Grandeurs *b. d* $\div\!\div$ 4. 9. le produit des nombres quarrés 4 & 9. qui est 36., sera, s. n. 11. un nombre quarré dont la racine se pourra par conséquent exprimer par ce nombre 6. Or 6 est le produit de la racine de 4, qui est 2, multipliée par la racine de 9, qui est 3 ; donc Liv. IV. n. 20. Ce nombre 6 est un moyen proportionnel entre 4 & 9. Donc puisque c'est un

moyen proportionnel entre b & d, il faut que $c = 6$. Ainsi ces trois Grandeurs $b. c. d.$ seront commensurables, puisque la raison qu'elles ont entr'elles se peut exprimer avec des nombres.

Second Cas.

Si la raison de la premiere Grandeur à la troisiéme est une raison de nombre à nombre qui n'ait pas pour ses exposans des nombres quarrés, la moyenne Grandeur est incommensurable en elle-même, & commensurable en puissance, à la premiere & à la troisiéme.

Soient $\div k. l. m.$ trois Grandeurs $k. m :: 3. 4.$ La raison de k à m est doublée de la raison de k à l, ou composée des deux raisons égales de k à l, & de l à m. Or 3 & 4, qui sont les exposans de cette raison doublée de k à m ne sont pas deux nombres quarrés; les deux raisons de k à l, & de l à m, dont cette raison est composée, ne peuvent donc être des raisons de nombre à nombre, par la neuviéme Proposition ci-dessus. Donc k & l sont incommensurables, comme aussi l & m. Mais puisque, Livre IV. n. 32.

$$\left. \begin{matrix} kk. & ll \\ ll & mm \end{matrix} \right\} :: k. m. \text{ ou } 3. 4.$$

Donc kk, ll, mm, sont commensurables; donc $k. l. m$, que l'on a démontré être incommensurables en elles-mêmes, sont commensurables en puissances, c'est-à-dire, que leurs quarrés sont commensurables; ce qu'il falloit prouver. kk est à ll, comme 3 à 4; & ll est à mm, comme 3 à 4.

On se tromperoit ici, si on prenoit pour exposant d'autres nombres que ceux qui sont les plus petits.

Car, par exemple, si on prend ces trois nombres 3. 6. 12. *ausquels soient égaux* k. l. m, *il est vrai que* k. l. m. :: 3. 6. 12. *Ainsi* k. l. m. *sont commensurables: quoique la raison de* k *à* m, *qui est double de celle de* k *à* l, *& de celle de* l *à* m, *ne soient pas comme celle de deux nombres quarrés; car* 3 *&* 12 *ne le sont pas. Mais si on réduit ces nombres aux plus petits, on aura* 1. 2. 4. *alors* k *sera à* m, *comme* 1 *à* 4, *qui sont deux nombres quarrés, ce qui rentre dans le premier cas. Les nombres exposans d'une raison sont toujours les plus petits de ceux qui la puissent exposer.*

Troisiéme Cas.

Si la raison de la premiere Grandeur à la troisiéme n'est pas de nombre à nombre, la moyenne Grandeur sera incommensurable, tant en elle-même qu'en puissance.

N'étant pas de nombre à nombre, elle n'est pas par conséquent comme des nombres quarrés. Ainsi la raison simple de la premiere à la seconde, dont celle de la premiere à la troisiéme est doublée, sera sourde par la neuviéme Proposition ci-dessus. On suppose toujours que la premiere Grandeur est connue; par conséquent si la raison qu'elle a avec la seconde est sourde, il faut que celle-ci soit inconnue, & qu'elle ne se puisse exprimer en nombre, non plus que la troisiéme.

Cette seconde Grandeur sera aussi incommensurable en puissance; parce que le quarré de la premiere est au quarré de la seconde, comme la premiere est à la troisiéme, Liv. IV. n. 32. Donc si la raison de la premiere à la troisiéme n'est pas de nombre à nombre, la raison du quarré de la premiere au quarré de la seconde ne sera pas de

nombre à nombre. La premiere & la seconde sont donc incommensurables en puissance. Il en est de même de la seconde à la troisiéme : ainsi ces trois Grandeurs sont incommensurables en elles-mêmes & en puissance.

ONZIE'ME PROPOSITION.

Théorême Onziéme.

85. *Quatre Grandeurs étant continuellement proportionnelles ; la raison de la premiere a la quatriéme ne pouvant être que de trois sortes, voici ce qui arrivera.*

Premier Cas.

Si la raison de la premiere à la quatriéme est une raison de nombre à nombre, qui ait pour ses exposans des nombres cubiques, ces quatre Grandeurs seront commensurables.

Soient ∺ *b.c.d.f.* quatre Grandeurs. *b.f* : : 8. 27 : puisque 8 & 27 sont deux nombres cubiques, leurs racines sont connues ; celles de 8 est 2, celle de 27 est 3. Multipliant le quarré de la premiere racine, lequel est 4, par la seconde racine qui est 3, ce qui produit 12 ; & 9 quarré de la seconde racine par la premiere racine qui est 2, ce qui produit 18 ; ces deux produits 12 & 18 seront deux moyens proportionnels entre 8 & 27. Liv. IV. n. 21. partant *b. c. d. f.* : : 8. 12. 18. 27. Ainsi les raisons que ces quatre grandeurs ont entr'elles, pouvant être exprimées par nombres, elles sont commensurables.

Second Cas.

Si la raison de la premiere à la quatriéme est

une raison de nombre à nombre, qui n'ait pas pour ses exposans des nombres cubiques; la premiere & la seconde Grandeur sont incommensurables en elles-mêmes, & commensurables en troisiéme puissance; & il en est de même de la seconde & de la troisiéme, comme aussi de la troisieme & quatrieme Grandeur.

Soient ∺ *k. l. m. n.* on suppose que *k. n.* :: 3. 4. la raison de *k* à *n*, étant triplée de la raison de *k* à *l*, ou composée de trois raisons égales de *k* à *l*, de *l* à *m*, de *m* à *n*, chacune de ces trois raisons égales ne sçauroit être de nombre à nombre, s. n. 23. Puisque la raison de *k* à *n*, qui est triplée de ces raisons a pour ses exposans les nombres 3 & 4, qui ne sont pas des nombres cubiques; ainsi elles sont incommensurables, *k* avec *l*, *l* avec *m*, & *m* avec *n*. Mais, Liv. IV. n. 33.

$$\left.\begin{matrix} kkk. & lll \\ lll. & mmm \\ mmm. & nnn \end{matrix}\right\} :: \left\{\begin{matrix} k. & & n. \\ & \text{ou} & \\ 3. & & 4. \end{matrix}\right.$$

Donc ces cubes sont commensurables, puisqu'ils sont comme 3 à 4; par conséquent les quatre Grandeurs proposées *k. l. m. n.* sont commensurables en troisiéme puissance, puisque leurs cubes sont commensurables.

Troisiéme Cas.

Si la raison de la premiere à la quatriéme Grandeur n'est pas de nombre à nombre, la premiere & la seconde, la seconde & la troisiéme, la troisieme & la quatriéme, sont incommensurables, tant en elles-mêmes, qu'en troisiéme puissance.

1°. Puisque la raison de la premiere à la

quatriéme, qui est triplée des raisons de ces quatre Grandeurs, n'est pas comme des nombres cubes, n'étant pas même de nombre à nombre, s. n. 23. les raisons de ces quatre Grandeurs sont sourdes, ainsi elles sont incommensurables en elles-mêmes.
2°. Ces Grandeurs sont pareillement incommensurables en troisieme puissance, parce que la raison du cube de la premiere au cube de la seconde est la même que la raison de la premiere Grandeur à la quatriéme, que l'on suppose n'être pas de nombre à nombre.

DOUZIEME PROPOSITION.

Théorême douziéme.

26. *Si deux grandeurs quarrées n'ont pas des nombres quarrés pour les exposans de leurs raisons, les racines en sont incommensurables.*

Et de même, si deux Grandeurs cubiques n'ont pas pour les exposans de leur raison, des nombres cubiques, elles sont incommensurables.

Car les quarrés sont en raison doublée de leurs racines, & les cubes en raison triplée. Or, s. n. 23. si deux raisons, ou doublée, ou triplée, n'ont pas pour exposans des nombres quarrés ou des nombres cubiques, les raisons dont elles sont composées sont sourdes; ainsi la racine des quarrés ou des cubes, qui ne sont pas entr'eux comme nombre à nombre, n'ont entr'elles qu'une raison sourde, ainsi elles sont incommensurables.

TREIZIEME PROPOSITION.

Théorême Treizieme.

Entre deux nombres qui n'ont pas pour exposans de leur raison des nombres quarrés, on ne peut trouver un nombre qui soit moyen proportionnel; & entre deux nombres qui n'ont pas pour exposans de leur raison des nombres cubiques, on ne peut pas trouver deux nombres qui soient moyens proportionnels. 27.

Car si la premiere de ces deux choses se pouvoit, trois Grandeurs proportionnelles seroient commensurables, quoique la premiere ne fût pas à la troisiéme comme deux nombres quarrés; ce qui est impossible par le second Cas de la Proposition dixiéme.

Et si la seconde se pouvoit, quatre Grandeurs proportionnelles seroient commensurables, quoique la premiere ne fût pas à la quatriéme comme deux nombres cubiques; ce qui est impossible par le second Cas de la Proposition onziéme.

COROLLAIRE I.

Deux nombres ne sont pas quarrés, si les exposans de leur raison ne sont pas des nombres quarrés. 28.

Soient *bb. cc*:: 1.2. ces deux nombres 1 & 2. exposans de la raison de *bb* à *cc*, n'étant pas quarrés, *bb* & *cc* ne le peuvent être; car par la Proposition précédente, entre *bb* & *cc*, on ne peut trouver de moyen proportionnel: ce qui se pourroit faire, si *bb* & *cc* étoient deux nombres quarrés; car le produit *bbcc* seroit un nombre quarré, s̃. n.

51. dont la racine *bc*, Liv. IV. n. 20. seroit moyen proportionnel entre *bb* & *cc*.

COROLLAIRE II.

29. *Ainsi l'on voit évidemment que l'on ne peut trouver un nombre quarré qui soit moitié, ou tiers, ou la cinquiéme partie, ou la sixiéme, ou la septieme, &c. d'un nombre quarré.*

Puisque ces nombres 2. 3. 5. 6. 7. &c. exposans de ces raisons, ne sont point des nombres quarrés.

COROLLAIRE. III.

30. *Deux nombres ne sont point cubiques, si les exposans de leur raison ne sont pas nombres cubiques.*

Soient *ddd*. *fff* :: 1. 2. Ces deux nombres 1, 2. qui sont les exposans, ne sont pas cubiques; partant *ddd* & *fff* ne le peuvent être. Car par la Proposition précédente, on ne peut pas trouver deux moyens proportionnels entre *ddd* & *fff*, ce qui se pourroit faire néanmoins, Liv. IV. n. 26. si *ddd* & *fff* étoient nombres cubiques.

COROLLAIRE IV.

31. *Ainsi on voit qu'on ne peut pas trouver un nombre cubique, qui soit ou moitié, ou tiers, ou la quatriéme, ou la cinquiéme, ou la sixiéme, ou la septieme partie, &c. d'un autre nombre cubique.*

Puisque ces nombres 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c. ne sont pas des nombres cubiques.

QUATORZIEME PROPOSITION.

Quatorziéme Théorême.

On ne peut exprimer par nombres, soit entiers, soit rompus, la valeur de la racine d'une puissance imparfaite. 372

Soit ce nombre 18 qui n'est pas un nombre quarré. Car il est évident qu'il n'y a point de nombre entier, qui, multiplié par lui-même, fasse 18. On pourroit, comme on l'a dit, penser qu'il pourroit y avoir quelque nombre rompu, qui exprimât la valeur de sa racine, que je nomme x, mais je vais démontrer que cela est impossible, car si cela étoit, la raison de x à 18 ne seroit pas sourde. Or elle l'est, ce que je prouve ainsi. Je multiplie 18 par 1, ce qui fait 18 que je puis ainsi considérer comme un nombre plan, dont la racine quarrée est un moyen proportionnel entre 1 & 18. *Liv* III. n. 68. Ainsi ∺ 1. x. 18. Or par le second Cas de la dixiéme Proposition ci-dessus, la raison de 1 à 18 n'ayant pas pour ses exposans des nombres quarrés, x est incommensurable avec 1. & avec 18.

Donc par la demande, s. n. 21. tout nombre ou toute Grandeur commensurable avec 18 ou avec 1; ne le sera pas avec x; ainsi x ne se peut exprimer avec aucun nombre. Sa raison avec 18 est donc sourde : ce qu'il falloit démontrer.

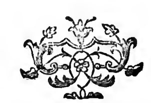
Soit donné le nombre 24, qui n'est pas cubique; je nomme x sa racine cubique; & prenant le cube de 1, qui est 1. ∺ 1. $1x$ $1xx$. 24. Liv. IV. n. 21. Par le second Cas de la onziéme Proposition ci-dessus, la raison de 1 avec $1x$ & $1xx$ à 24, est sourde. Or $1xx$ est la même chose que xx, &

de même $1x$ & x. Donc x étant incommensurable avec 1 & 24. Grandeurs commensurables, il sera aussi incommensurable avec toute autre nombre, & ne se pourra point exprimer.

Ainsi de toutes les autres puissances imparfaites.

Autre démonstration.

Pour avoir une démonstration sensible, qu'il n'y a point de nombre rompu qui puisse exprimer la valeur de x qu'on suppose la racine quarrée de 18, il faut se souvenir que pour réduire 18 en fraction, afin d'avoir une racine plus grande que 4, racine de 16, nombre quarré qui approche le plus de 18, il faut multiplier 18 par le quarré de la fraction, dans laquelle on a réduit 18, p. 304[e]. Ce produit n'est point nombre quarré, s. n. 10. donc en ayant ôté la racine quarrée du plus prochain, il restera encore quelque chose. Prenant une plus petite fraction, on aura encore un nombre qui ne sera pas quarré. Il est bien vrai qu'on trouvera une racine plus grande que la précédente, mais moindre que la véritable; ainsi puisque, quelque petite fraction qu'on prenne, ce ne sera jamais un quarré, il y aura toujours du reste, sans pouvoir jamais venir à une Grandeur précisément égale à x.



SECTION TROISIEME.

Des Opérations de l'Arithmétique sur les Grandeurs incommensurables.

CHAPITRE PREMIER.

On peut faire toutes les Opérations de l'Arithmétique sur les Grandeurs incommensurables. Préparation pour cela.

QUOIQU'ON ne connoisse point la valeur d'une racine sourde, on peut néamoins faire sur elle toutes les opérations de l'Arithmétique, l'ajouter avec une autre racine, ou l'en soustraire, les multiplier ou les diviser l'une par l'autre. Ces racines qu'on nomme Grandeurs *irrationelles* ou sourdes, se rencontrent souvent. L'extraction des racines, soit de celles qui sont quarrées, soit de celles qui sont cubiques, est une opération fort ordinaire. Comme il y a donc plus de nombres qui ne sont ni quarrés ni cubiques, que de nombres quarrés ou cubiques, à tous momens on trouve des racines sourdes; ainsi il est important de connoître comment on peut opérer sur ces sortes de Grandeurs : mais avant que de faire ces opérations sur les racines sourdes, il les faut préparer. Cette préparation est aisée; elle est fondée sur la demande suivante. 33

DEMANDE.

34. *Une racine ne devient pas plus grande lorsque de racine quarrée qu'elle étoit, on fait qu'elle est racine cubique, ou racine quarrée de quarré, en augmentant les dimensions de la Grandeur dont elle est la racine.*

Par exemple, a est la racine de toutes ces puissances. a^2. a^3. a^4. a^5. ainsi leurs racines ne valent pas l'une plus que l'autre.

PROPOSITION QUINZIEME.

Problême Premier.

35. *Réduire deux ou plusieurs racines sourdes à un même nom ou même signe.*

Pour réduire deux racines au même nom, il faut élever la plus petite puissance à la plus grande, selon qu'on l'a enseigné, si la premiere est $\sqrt{aa}$, & la seconde $\sqrt[3]{b^3}$. j'augmente aa d'une dimension, & alors $\sqrt[3]{a^3}$. & $\sqrt[3]{b^3}$, auront un même nom, ce seront deux racines cubiques : ce qui ne change point leur valeur ; car par la Demande précédente $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[2]{a^2}$.

Quand on veut réduire une Grandeur absolue à un même nom avec une racine donnée, il faut prendre le quarré ou le cube de la grandeur absolue, selon que la racine proposée est racine de quarré ou de cube, &c. Ainsi, s'il faut réduire 5 & $\sqrt{27}$ au même nom, je prends le quarré de 5, qui est 25, devant lequel je mets le signe radical ainsi,

ainsi, $\sqrt{25}$. Après cela 5 & $\sqrt{27}$ sont réduits au même nom sans changer leur valeur ; car $\sqrt{25}$ est la même chose que 5.

L'on ne peut pas toujours, selon cette regle, réduire au même signe deux racines sourdes. Par exemple, soient données ces deux racines $\sqrt{5}$ & $\sqrt[3]{40}$; pour élever cette racine $\sqrt{5}$, de quarrée la faire une racine cubique, il faudroit multiplier le quarré 5 par sa racine quarrée, ce qui est impossible, puisque cette racine est sourde. Il faut donc élever ces deux racines proposées à de plus hautes puissances, sans qu'il soit besoin de connoître la valeur de la racine quarrée de 5, ni celle de la racine cubique de 40. Dans l'exemple proposé, multipliant 5 par lui-même, on fait 25, qui est un quarré de quarré, dont la racine est $\sqrt[4]{25}$, qui est la même chose que $\sqrt{5}$; & en multipliant le quarré de quarré 25 par le quarré, j'aurai 125, qui est un quarré cube, dont la racine est $\sqrt[6]{125}$, égale à $\sqrt{5}$. En multipliant le cube 40 par lui-même, cela fait 1600, qui est un quarré cube, dont la racine est $\sqrt[6]{1600}$, égale à $\sqrt[3]{40}$. Ainsi les deux racines $\sqrt{5}$ & $\sqrt[3]{40}$, étant réduites à celles-ci $\sqrt[6]{125}$ & $\sqrt[6]{1600}$, elles ont un même nom.

Definition.

On appelle exposant d'une Grandeur incommensurable l'expression la plus simple qui puisse marquer sa juste valeur. 36.

Lemme.

Une puissance faite par la multiplication de deux 37.

puissances, a pour racine le produit des deux racines de ces deux puissances.

Soit $aaxx$, fait de la multiplication de aa par xx, la racine de ce quarré est ax produit des racines des deux quarrés aa & xx. De même soit $aaa\,xxx$ fait de la multiplication de aaa par xxx, la racine de ce cube est ax produit des deux cubes aaa & xxx, ce qui est évident.

On ne met le signe radical que devant les puissances imparfaites pour marquer leur racine. Les racines de celles qui sont parfaites s'expriment simplement sans ce signe. Ainsi au lieu de $\sqrt{aa}$, *on écrit simplement* a. Car $\sqrt{aa} = a$.

PROPOSITION SEIZIEME.

Problême Second.

68. *Réduire les racines sourdes à des expressions plus simples, ou aux plus petits termes avec lesquels elles puissent être exprimées.*

Cette réduction ne se peut faire que lorsque les puissances devant lesquelles est placé le signe radical sont telles qu'elles peuvent être divisées par un diviseur, lequel, ou le quotient de la division, soit un nombre quarré ou cube. Par exemple, on pourroit réduire $\sqrt{27}$ à une expression plus simple, divisant 27 par 9, un nombre quarré, le quotient de cette division est 3, que j'écris après le signe radical, devant lequel j'écris la racine de 9, qui est 3, ainsi $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$.

Puisque 9 est 3 fois dans 27, donc $9 \times 3 = 27$: donc considérant 9 & 3 comme deux quarrés, le produit de leurs racines, qui sont 3 & $\sqrt{3}$, sera la racine de 27 par le Lemme précédent. Ainsi $3 \times \sqrt{3}$ ou $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$. Ainsi $3\sqrt{3}$ est l'ex-

posant de cette Grandeur incommensurable $\sqrt{27}$.

Pour réduire à un meme terme deux Grandeurs incommensurables, il faut trouver, si cela est possible, un commun diviseur qui soit tel, que le quotient de la division soit une puissance parfaite. Soient données ces deux Grandeurs incommensurables $\sqrt{75}$ & $\sqrt{27}$, pour les réduire à de plus petits termes, je divise 75 & 27 par 3 ; les quotiens sont 25 & 9 nombres quarrés, dont les racines sont 5 & 3. Je les place devant le signe radical $\sqrt{}$, après lequel je mets le diviseur 3 de cette maniere $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$; & je dis que $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$ & $3\sqrt{3} = \sqrt{27}$, comme nous venons de le démontrer.

COROLLAIRE.

On peut connoître quelle est la raison de deux racines sourdes. 39.

Ayant réduit ces deux racines $\sqrt{75}$ & $\sqrt{27}$ à cette expression $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$, puisque deux produits, dont un des multiplicateurs est le même, sont entr'eux comme des multiplicateurs inégaux. Donc $5\sqrt{3} . 3\sqrt{3} :: 5 . 3$. Ainsi une racine qui n'est pas commensurable avec le quarré dont elle est la racine, peut être commensurable avec une autre racine sourde.

DEFINITION.

Les racines sourdes dont on peut ainsi exprimer la raison, sont appellées communicantes *ou* commensurables. 40.

PROPOSITION DIX-SEPTIEME.

Problême Troisiéme.

Trouver si deux racines sourdes sont commensurables ou communicantes entr'elles. 41.

Cela se trouve par la multiplication & par la division. 1°. Multipliant deux Grandeurs proposées, l'une par l'autre, si leur produit est un nombre quarré, leurs racines sont *communicantes*. Soient ces deux Grandeurs $\sqrt{2}$ & $\sqrt{8}$, je multiplie 2 par 8 ; le produit 16 est un nombre quarré, dont 4 la racine montre $\sqrt{2}$ est à $\sqrt{8}$, comme 1 à 2, ce que je démontre.

Soit $2 = xx$ & $8 = zz$, partant $\sqrt{2} = x$ & $\sqrt{8} = z$, le produit de xx par zz est $xxzz$ égal à 16. Ainsi $xz = 4$. Or, Livre IV. n. 20. $xx . xz :: xz . zz$. Donc $xx . xz :: x . z$; ou, ce qui est la même chose, $2 . 4 :: \sqrt{2} . \sqrt{8}$, & partant $1 . 2 :: \sqrt{1} . \sqrt{8}$.

2°. Divisant deux Grandeurs l'une par l'autre, si le quotient de la division est un nombre quarré, leurs racines sont *communicantes*. Je divise 8 par 2, le quotient 4 est un nombre quarré ; alors $\sqrt{2}$ est à $\sqrt{8}$, comme 1 à 2. Car 2 & 8 divisés par 2 demeurent en même raison, Liv. III. n. 65. Ainsi $2 . 8 :: 1 . 4$. Donc, Liv. IV. n. 29. $\sqrt{2} . \sqrt{8} :: \sqrt{1} . \sqrt{4}$. c'est-à-dire, que $\sqrt{2} . \sqrt{8} :: 1 . 2$. ce qu'il falloit prouver.

Exemples.

Je connois aussi que les racines $\sqrt{a^4 + aabb}$ & $\sqrt{aabb + b^4}$ sont commensurables, parce que divisant $a^4 + aabb$ par $aa + bb$, le quotient est aa ; & divisant $aabb + b^4$ par le même diviseur $aa + bb$, le quotient sera bb. Ces deux quotiens aa & bb sont deux nombres quarrés, dont les racines sont a & b ; ainsi les deux racines proposées, réduites à leurs expressions les plus simples, selon qu'il a été enseigné, s. n. 38. sont $a\sqrt{aa + bb}$ & $b\sqrt{aa + bb}$, lesquels sont comme a est à b. Soient encore données ces deux

racines $\sqrt{12}$ & $\sqrt{3}$, je divise 12 & 3 par 3, les deux quotiens sont 4 & 1, deux nombres quarrés. Donc, 5. n. 28. $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ & $1\sqrt{3} = \sqrt{3}$: car 1 ne multiplie point. Par cette opération je découvre que l'une de ces deux racines est double de l'autre.

Soient données ces deux racines $\sqrt[3]{135}$ & $\sqrt[3]{320}$; pour connoître si elles sont commensurables, je divise l'une & l'autre par 135, les quotiens sont 1 & $2\frac{50}{135}$. Je réduis la fraction du dernier quotient à une fraction plus simple, divisant le numérateur & le dénominateur par 5, & vient $\frac{10}{27}$, Liv. V. n. 24. Ainsi $\frac{50}{135} = \frac{10}{27}$. Je réduis les deux entiers en fractions, comme il a été enseigné, écrivant $\frac{54}{27}$ à quoi ajoutant $\frac{10}{27}$, cela fait $\frac{64}{27}$. Je réduis pareillement le premier quotient 1 à une fraction de même nom que cette derniere, écrivant $\frac{27}{27}$. La racine cubique de $\frac{27}{27}$ est $\frac{3}{3}$, celle de $\frac{64}{27}$ est $\frac{4}{3}$: donc $\sqrt[3]{320} . \sqrt[3]{135} :: \frac{4}{3} . \frac{3}{3} :: 4 . 3$. Ces exemples peuvent suffire, parce que mon dessein est d'être le plus court que je pourrai.

CHAPITRE II.

Les quatre Opérations de l'Arithmétique sur les Racines sourdes.

POur faire l'addition des Racines, il ne suffit pas d'ajouter en une somme les Grandeurs dont elles sont racines ; car, par exemple, ayant ajouté 16 avec 9, cela fait 25, dont la racine quarrée qui est 5, n'est pas 7, somme des racines de 9 & de 16 ; il faut donc chercher des regles particulieres. La premiere chose que l'on doit faire, est de réduire au même nom les racines proposées, si elles en ont de différens, & ensuite les réduire à l'expression la plus simple.

PROPOSITION DIX-HUITIEME.

Problême Quatriéme.

42. *Ajouter dans une somme deux ou plusieurs racines sourdes.*

Cela se peut faire en plusieurs manieres. 1°. Joignant par le signe + les racines données, ainsi pour ajouter $\sqrt{45}$ avec $\sqrt{30}$, je lie ces deux racines par + en cette maniere $\sqrt{45} + \sqrt{30}$.

2°. Il faut réduire les racines proposées à un même nom, pour reconnoître si elles sont commensurables entr'elles. Si elles le sont, il faut ajouter dans une somme les exposans de leur raison, & mettre ensuite le signe radical avec le diviseur commun, par lequel les Grandeurs, dont les racines sont proposées, ont été divisées.

Soient données ces deux racines $\sqrt{75}$ & $\sqrt{27}$, je les réduis à cette expression $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$, qui me fait connoître que les exposans de ces racines sont 5 & 3, que j'ajoute, écrivant, selon cette regle, $8\sqrt{3}$, qui est la somme de $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$, comme il évident.

3°. Pour ajouter deux racines secondes sourdes d'une troisiéme maniere, il faut premierement sçavoir que multipliant les quarrés de deux racines l'un par l'autre, la racine de ce quarré sera le plan de deux racines, ce qui est évident; xx multiplié par zz produit le quarré $xxzz$, dont la racine xz est le plan des racines de xx & de zz. Il est aussi évident que la racine quarrée de l'addition de xx avec zz plus deux fois le plan des deux racines de xx & de zz, c'est-à-dire $2xz$. Il est, dis-je, évident que $x+z$ la racine de cette somme $xx+2xz+zz$, est la somme des racines de xx & de zz. Partant pour ajouter $\sqrt{75}$ avec $\sqrt{48}$. 1°. J'ajoute 75 avec 48, ce qui fait 123. 2°. Je multiplie 75 par 48, le produit est 3600, dont la racine quarrée 60 est le plan des racines $\sqrt{75}$ & $\sqrt{48}$, comme on le vient de voir. Je double 60, ce qui fait 120, que j'ajoute à 123, cela fait 243, dont la racine quarrée, qui est $\sqrt{243}$, est la somme de $\sqrt{75}$, ajouté avec $\sqrt{48}$.

Lorsque le produit des deux nombres n'est pas un nombre quarré, comme l'est celui de 75 & de 48, on ne peut point en cette maniere ajouter les racines secondes proposées.

Proposition Dix-neuviéme.

Problême Cinquiéme.

Soustraire des Racines sourdes les unes des autres, 43.

Cela se peut faire aussi en plusieurs manieres, 1°. en changeant les signes qui précédent les signes radicaux, pour soustraire $\sqrt{aa - bb}$ de $\sqrt{aa + bb}$, il faut écrire $\sqrt{aa + bb} - \sqrt{aa - bb}$. Pour ôter $\sqrt{40}$ de $\sqrt{50}$, j'écris $\sqrt{50} - \sqrt{40}$.

2°. Lorsque les racines données sont commensurables entr'elles, il faut retrancher l'exposant de l'une de l'exposant de l'autre, & mettre ensuite le signe radical avec le diviseur commun par lequel les Grandeurs, dont les racines sont proposées, ont été divisées.

Soient données ces deux racines $\sqrt{75}$ & $\sqrt{27}$, je les réduis à cette expression qui est plus simple $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$; ensuite pour retrancher $3\sqrt{3}$ de $5\sqrt{3}$, j'écris $2\sqrt{3}$, qui est ce qui reste après cette soustraction, ou ce qui est la différence des deux racines proposées.

3°. Pour les secondes racines sourdes, on ajoute dans une somme les deux Grandeurs qui sont après le signe radical, & l'on retranche de cette somme deux fois la racine du produit de ces deux Grandeurs ; & la racine de ce reste est la différence ou le reste qu'on cherche.

Pour retrancher $\sqrt{48}$ de $\sqrt{75}$, j'ajoute dans une somme 75 & 48 ; & j'ai 123, dont je retranche 120, c'est-à dire deux fois 60, qui est la racine de 3600, produit de 75 par 48. Il reste 3, dont la racine, sçavoir $\sqrt{3}$, est la différence ou le reste que l'on cherche.

Le nombre 75 soit nommé xx, & 48 soit nommé zz, en retranchant $\sqrt{zz}$ de $\sqrt{xx}$, le reste est $x - z$. Ainsi il faut démontrer que $x - z = \sqrt{3}$. Le quarré de $x - z$ est $xx - 2xz + zz$, lequel est égal à 75 plus 48, moins deux fois le produit de la racine du produit de 75 & de 48, la-

quelle est 60. Ainsi $xx - 2xz + zz = 75 - 120 + 48$. Or de $75 + 48$, c'est-à-dire, de 123, ayant retranché 120, le reste est 3. Donc $xx - 2xz + zz = 3$. Donc $\sqrt{xx - 2xz + zz}$, ou $x - z = \sqrt{3}$; ce qu'il falloit démontrer.

Proposition Vingtieme.

Théorême Sixiéme.

Multiplier deux Racines sourdes. 44.

1°. Si ces deux racines sont les mêmes, il ne faut qu'ôter à l'une le signe radical. Quand on multiplie $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$, on cherche un quarré dont $\sqrt{5}$ marque la racine, par conséquent ce quarré est 5.

2°. En général les racines ayant été réduites au même nom, il faut multiplier les Grandeurs dont les racines sont proposées les unes par les autres, la racine de ce produit sera celui des racines, ce qui est évident; car soient ces deux Grandeurs xx & zz, leur produit est $xxzz$, dont la racine quarrée est xz, produit de x & de z les deux racines de xx & de zz. S'il faut donc multiplier la racine $\sqrt{15}$ par $\sqrt{6}$, je multiplie 15 par 6, ce qui fait 90, dont la racine quarrée est égale à la racine de 15, multipliée par celle de 6.

S'il faut multiplier $\sqrt{ab}$ par $\sqrt{cd}$, le produit sera $\sqrt{abcd}$.

Lorsque les racines sont réduites à leurs plus petits termes, on multiplie ce qui précéde le signe radical de l'un par ce qui précéde celui de l'autre, & ce qui le suit par ce qui le suit, en conservant le même signe $\sqrt{}$ entre deux; ainsi $3\sqrt{2}$ par $5\sqrt{3}$ donnent pour produit $15\sqrt{6}$.

Mais lorsque ces racines sont communicantes,

il suffit de multiplier ce qui précéde les signes l'un par l'autre, & ensuite multiplier ce produit par le diviseur commun qui est sous le signe; ainsi pour multiplier $5\sqrt{3}$ par $3\sqrt{3}$, je multiplie 5 par 3, qui précédent les signes, & le produit 15 par 3, qui est le diviseur commun sous le signe $\sqrt{}$, ce dernier produit 45 est le cherché; car ces deux racines $5\sqrt{3}$ & $3\sqrt{3}$, étant considérées comme réduites à leurs plus simples expressions & non communicantes, leur multiplication auroit donné pour produit $15\sqrt{9}$. Or 9 étant un nombre quarré dont 3 est la racine, ce signe $15\sqrt{9}$, marque que 15 est multiplié par 3, ce qui fait 45. On trouve ainsi que le produit de $\sqrt{27}$ par $\sqrt{75}$, dont $3\sqrt{3}$ & $5\sqrt{3}$ sont les exposans, est 45.

Corollaire.

45. *On peut connoître le produit de deux secondes racines sourdes, lorsque les Grandeurs dont elles sont les racines, étant multipliées l'une par l'autre, produisent un nombre quarré.*

Ces racines sourdes $\sqrt{2}$ & $\sqrt{50}$, étant multipliées l'une par l'autre, elles produisent le nombre quarré 100 dont la racine est 10, qui étant égale au produit des racines de 2 & de 50, on connoît le produit de ces racines.

Cela est admirable, qu'on ne puisse point connoître deux Grandeurs, & qu'on puisse démontrer la valeur de leur produit, & même quelle raison elles ont entr'elles; car ces deux racines étant données $\sqrt{2}$ *&* $\sqrt{18}$, *je sçai que leur produit est* $\sqrt{36}$, *c'est-à-dire* 6; *& comme elles sont* communicantes, *je sçai encore que* $\sqrt{2}$ *est à* $\sqrt{18}$, *comme* 1 *est à* 3, *puisque* $\sqrt{2} = 1\sqrt{2}$ & $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

PROPOSITION VINGT-UNIEME.

Problême Septiéme.

Diviſer une racine ſourde par une autre racine ſourde. 46.

La diviſion défait ce qu'a fait la multiplication ; ſi $\surd 2$ multipliant $\surd 50$ fait $\surd 100$, qui eſt la racine du produit de 2 par 50 ; donc pour diviſer $\surd 100$ par $\surd 50$, il faut diviſer 100 par 50, la racine du quotient de cette diviſion, c'eſt-à-dire $\surd 2$, ſera la racine cherchée.

Ainſi, pour diviſer $\sqrt{aaab - abbb}$ par $\sqrt{aa - bb}$ il faut ſimplement diviſer $aaab - abbb$ par $aa - bb$, de laquelle diviſion le quotient eſt ab ; la racine de ce quotient ab eſt ce qu'on cherche.

Que ſi les racines ſont réduites à leurs plus petites expreſſions, on diviſe ce qui précéde le ſigne par ce qui précede le ſigne du diviſeur, & ce qui le ſuit par ce qui le ſuit, en conſervant le même ſigne $\surd$ entre les deux expoſans : ainſi $15 \surd 6$ diviſées par $3 \surd 2$ donnent $5 \surd 3$.

Mais lorſque ces racines ſont communicantes, on n'a beſoin que de diviſer ce qui précede le ſigne, & l'expoſant eſt ce qu'on cherche ; ainſi $15 \surd 3$ diviſées par $3 \surd 3$ l'expoſant eſt 5, ce qui eſt évident, la diviſion défaiſant ce qu'a fait la multiplication.

Et comme il n'arrive pas toujours que ces diviſions ſoient ſans fractions, on ſe contente ſouvent de ſéparer les deux Grandeurs écrites l'une ſur l'autre par une ligne en forme de fraction ; ainſi $\frac{\surd 60}{\surd 7}$ $\frac{\surd ab}{\surd cd}$ $\frac{3 \surd 5}{2 \surd 3}$.

CHAPITRE III.

Des Binomes & Multinomes.

DEFINITIONS.

PREMIERE DEFINITION.

47. *La somme de deux Grandeurs incommensurables entr'elles se nomme* Binomes.

Ainsi cette Grandeur $a + \sqrt{b}$ est une Binome, si la racine $\sqrt{b}$ est incommensurable avec la Grandeur a.

SECONDE DEFINITION.

48. *La différence de deux Grandeurs incommensurable entr'elles, s'appelle* Apotome *ou* Résidu.

On dit, par exemple, que $a - \sqrt{b}$ est un Apotome. Les Apotomes se nomment aussi *Binomes.*

TROISIEME DEFINITION.

49. *Une Grandeur composée de plusieurs Grandeurs incommensurables entr'elles, est nommée* Multinome.

La Grandeur $a - \sqrt{b} + \sqrt{c}$ est multinome, si ces trois Grandeurs sont incommensurables entr'elles.

Euclide distingue plusieurs sortes de Binomes à qui il donne différens noms, dont il n'est pas fort nécessaire de charger sa mémoire.

De l'Addition & Soustraction des Binomes & Multinomes.

L'Addition & la Soustraction de ces Grandeurs n'ont rien de particulier. Pour ajouter $30 - 4\sqrt{5}$ & $8\sqrt{12} - 4\sqrt{5}$, j'écris $30 - 4\sqrt{5} + 8\sqrt{12} - 4\sqrt{5}$: & pour retrancher $8\sqrt{12} - 4\sqrt{5}$ de $30 - 4\sqrt{5}$, j'écris $30 - 4\sqrt{5} - 8\sqrt{12} + 4\sqrt{5}$. 50.

De la Multiplication des Binomes & des Multinomes.

Elle se fait comme celle des Grandeurs complexes. Pour multiplier $a + \sqrt{d}$ par $f + \sqrt{b}$, je multiplie premierement $a + \sqrt{d}$ par f, ce qui fait $af + f\sqrt{d}$; ensuite je multiplie $a + \sqrt{d}$ par $\sqrt{b}$, ce qui fait $a\sqrt{b} + \sqrt{bd}$; j'ajoute les deux produits en un; $af + f\sqrt{d} + a\sqrt{b} + \sqrt{bd}$, qui est celui que l'on cherchoit. 51.

Autre Exemple.

Pour multiplier $6 + 2\sqrt{5}$ par lui-même, je multiplie 6 par 6, ce qui fait 36, & $2\sqrt{5}$ encore par 6, ce qui fait $12\sqrt{5}$; ensuite je multiplie 6 par $2\sqrt{5}$, ce qui fait $12\sqrt{5}$, & $2\sqrt{5}$ par $2\sqrt{5}$, de laquelle multiplication le produit est 20; car le produit de $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$, c'est 5, qui est le quarré de $\sqrt{5}$. Donc en multipliant $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$, on fait déja 5. Le produit des nombres 2 & 2 qui sont devant le signe radical $\sqrt{5}$, est 4. Ainsi comme il faut concevoir qu'on multiplie par 4 le produit de $\sqrt{5}$ par $\sqrt{5}$; sçavoir 5, ce qui fait 20; l'entier produit de toute cette multiplication est

$36 + 12\sqrt{5} + 12\sqrt{5} + 20$, ou, ce qui eſt la même choſe, $56 + 24\sqrt{5}$.

De la diviſion des Binomes & des Multinomes.

52. Elle ſe fait comme celle des Grandeurs complexes, mettant le Binome à diviſer ſur le Binome, qui eſt le diviſeur. Mais il n'en eſt pas comme des grandeurs ordinaires dont la diviſion ſe fait facilement, ou dont les diviſions s'expriment nettement, parce qu'on peut effacer les mêmes lettres qui ſe trouvent dans le diviſeur, & la grandeur qui eſt à diviſer, comme en diviſant ab par b, on n'écrit que a. Néanmoins on peut appliquer aux Binomes & aux Multinomes ce qu'on a dit des incommenſurables, dont on a vû que les diviſions en certains cas ſe pouvoient exprimer d'une maniere fort ſimple. Pluſieurs ont tâché de trouver d'autres regles. Il eſt bon de tenter, mais on ſe trompe facilement, quand on prétend faire une regle générale de ce qui ne ſe rencontre que dans un exemple particulier.

De la réſolution des puiſſances des Binomes.

Cette réſolution pour l'ordinaire eſt impoſſible. Juſqu'à préſent l'on n'a pu trouver de regles certaines & générales pour extraire toutes ſortes de racines de ces grandeurs. Voici la regle que l'on donne pour extraire les racines quarrées des Binomes.

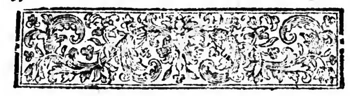
1°. On retranche le quarré de la petite partie du quarré de la grande, & on tire la racine du reſte.

2°. On ajoute cette racine à la grande partie, ce qui fait une ſomme, & on la retranche de la

même partie, ce qui fait une différence.

3°. On tire la racine de la moitié de la ſomme, & la racine de la moitié de la différence; enſuite on prend la ſomme de ces deux racines; ſi chaque partie du Binome a le ſigne $+$; ou bien on prend leur différence, ſi une partie a $+$, & l'autre $-$, & l'on a la racine que l'on cherche. Ainſi pour tirer la racine quarrée de ce Binome $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, 1°. je retranche $4aabc$, qui eſt le quarré de la plus petite partie, de $a^4 + 2aabc + bbcc$, qui eſt le quarré de la plus grande partie; le reſte eſt $a^4 - 2aabc + bbcc$, dont la racine quarrée $aa - bc$, étant ajoutée à la plus grande partie $aa + bc$; & en étant ôtée, elle fait cette ſomme $2aa$, & cette différence $2bc$, dont les moitiés ſont aa & bc, dont les racines quarrées ſont a & $\sqrt{bc}$, leſquelles étant jointes par le ſigne $+$, elles font $a + \sqrt{bc}$, qui eſt la racine que l'on cherche; car ſi l'on multiplie cette racine $a + \sqrt{bc}$ par elle-même, le produit de cette multiplication qui eſt le quarré de cette racine, ſera $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, qui eſt le Binome dont on cherchoit la racine: Donc $a + \sqrt{bc}$ eſt la racine que l'on cherchoit.

Pour tirer la racine cubique de $45 + 29\sqrt{2}$: Otez 2 de 29, à cauſe que 2 eſt ſous le ſigne $\sqrt{}$, reſte 27; prenez-en le tiers 9 dont la racine 3, jointe avec $\sqrt{2}$, ou $3 + \sqrt{2} = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}}$ & $3 - \sqrt{2} = \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$, car il faut garder le même ſigne de la partie commenſurable. Si vous formez le cube de $3 + \sqrt{2}$, ou plutôt le cube de $a + \sqrt{b}$, & que vous en remarquiez les parties, vous verrez bien la démonſtration de la Regle, & les eſpeces où elle doit réuſſir.



ELEMENS DES MATHEMATIQUES, OU TRAITÉ DE LA GRANDEUR EN GÉNÉRAL.

LIVRE SEPTIEME.

De la Méthode de résoudre une Question ou Problême.

CHAPITRE PREMIER.

Il y a deux différentes Méthodes de résoudre une Question ou Problême, qui sont la Synthese *&* l'Analyse. *Dans celle-ci on suppose les choses telles qu'elles le doivent être, selon que la question est proposée. Comment cela se peut faire.*

1. ON nomme question la Proposition ou la recherche d'une vérité qui est inconnue, mais dont on connoît quelque rapport avec des vérités connues. On ne cherche point ce qu'on connoît,

ce seroit aussi en vain qu'on chercheroit ce qu'on ignore, si on n'en avoit quelque connoissance; aussi dans une question tout n'est pas inconnu. Or c'est de ce qu'on sçait déja qu'on peut apprendre ce qu'on ne sçavoit point: une premiere connoissance servant de degré pour en acquerir de nouvelles. Pour cela il faut se servir de l'une ou de l'autre de ces deux méthodes, que l'exemple suivant fera comprendre. Supposons un homme qui veut connoître les ressorts d'une montre, & qui n'en a jamais vû d'ouverte & de démontée. Si cette montre étoit dans sa boëte, & qu'ainsi il ne vît point ce qui la fait marcher, il seroit porté à l'ouvrir & à la démonter pour en voir le dedans; ce seroit la premiere méthode qu'il suivroit. Si cette montre étoit démontée, & que toutes ses piéces fussent séparées, il souhaiteroit de trouver un Artisan habile qui pût les assembler, & lui en expliquer l'usage. La premiere de ces méthodes s'appelle *Analyse*, c'est-à-dire, Méthode de résolution; parce qu'on résout en ses parties la chose qu'on veut connoître. La seconde méthode s'appelle *Synthese* ou méthode de composition, parce qu'on assemble les parties de la chose qu'on examine. La premiere défait, la seconde compose. C'est en suivant l'une ou l'autre méthode que l'on peut résoudre une Question.

Il ne faut point s'attacher scrupuleusement à l'étymologie des noms, il faut voir ce qu'ils signifient dans l'usage présent. Par la *Synthese*, on entend la méthode de résoudre une Question par les principes de la Science que cette Question regarde: comme pour résoudre les Théorémes & les Problêmes que nous avons proposés dans les six premiers Livres, vous avez vû en chaque Livre, que nous nous sommes servis de ce que nous

avions démontré précédemment, & qu'ainsi nous avons composé comme un corps de doctrine qui comprend toutes les vérités principales que doit renfermer un Traité de la Grandeur en général. Ainsi il n'est pas nécessaire de parler plus au long de la *Synthese*. Cet ouvrage, si on en est content, peut servir de modele de ce qu'on doit faire lorsqu'on l'employe. On l'appelle *Méthode de Doctrine*, parce qu'elle est propre pour enseigner. Un Maître qui sçait déja les choses, ne propose d'abord à son Disciple que celles qui sont faciles à comprendre, le menant par degrés de connoissance en connoissance, selon que les vérités qu'il enseigne se suivent, ou que les unes servent à faire comprendre les autres; car comme elles lui sont toutes connues, il les peut ranger comme il lui plait. C'est ainsi que j'ai rangé les parties de ce Traité, après avoir bien connu moi même ce que j'avois dessein de faire connoître. Il n'en est pas de même de l'*Analyse*. On ne l'employe pas pour faire connoitre ce que l'on sçait, mais pour trouver ce qu'on ne sçavoit pas; c'est pour cela qu'on l'appelle *Méthode d'invention*; & c'est cette Méthode à laquelle j'ai destiné ce septiéme Livre. Ce mot *Analyse* se peut traduire en François *Résolution*. Mais encore une fois ne nous arrêtons pas à ce que signifie ce mot; tâchons d'en avoir une notion si claire, selon qu'on l'entend aujourd'hui, que nous puissions déduire de cette notion ce qu'on doit faire lorsqu'on se sert de cette méthode.

Un Problême étant proposé, lorsqu'on suppose d'abord la chose faite comme elle le doit être, & que de ce qui est connu dans la Question, on en tire la connoissance de ce qu'on ne sçavoit pas, c'est cela qu'on appelle *Analyse* ou *Méthode*

d'invention ; parce qu'avec son secours on découvre & on vient à connoître ce qu'on ne connoissoit pas auparavant, au lieu que dans la Synthese on ne peut enseigner & on n'enseigne effectivement aux autres, que ce qu'on sçait déja.

Ainsi la notion que nous venons de donner de l'Analyse, nous apprend que la premiere chose qu'on doit faire, c'est d'exprimer nettement ce qui est proposé, afin de le considérer attentivement, puisque de la seule supposition qu'on fait que la chose dont il s'agit est faite d'une telle maniere, on doit déduire tout ce qu'on en veut sçavoir. Pour être entendu, servons-nous d'un exemple. On propose de découvrir les âges de trois personnes. *Le second est*, dit-on, *plus vieux que le premier de cinq ans, le troisiéme a le double des années du premier & du second, & les âges de ces trois personnes sont ensemble 75 années.* Si je nomme x l'âge du premier, celui du second sera $x+5$; & puisque l'âge du troisiéme est le double de l'âge du premier & du second, donc son âge sera $4x+10$. Ainsi ces trois âges sont x, $x+5$, $4x+10$. Or ils sont égaux à 75; donc $6x+15=75$. On a ainsi exprimé le Problême proposé tel qu'il est. C'est de cette seule supposition qu'il faut déduire la vérité qu'on cherche, c'est-à-dire quel est l'âge de chacun.

Chapitre II.

L'Analyse suppose les choses faites comme on les propose dans une Question ; & par le moyen de ce qu'on y connoît, elle égale les grandeurs inconnues à celles qui sont connues, ce qui s'appelle trouver des Equations. Regles pour cela.

Premiere Regle.

2. *La premiere chose que l'on doit faire, est de concevoir très distinctement l'état de la Question qu'on propose de résoudre ; c'est-à-dire ce qu'il faut chercher pour satisfaire à la Question.*

Une question est presque résolue quand on sçait bien ce qu'il faut chercher, ce qui paroîtra plus clairement dans un exemple. On propose à un homme qui ne sçait pas la Langue de la Chine, de faire un recueil de plusieurs mots, entre lesquels se trouvent écrits les termes de cette Langue, sans le secours d'aucun Livre, ni d'aucun Maître. Cette question paroît d'abord impossible ; néanmoins quand on y fait bien attention, on apperçoit que pour satisfaire à ce Probleme, il n'est question que de trouver par l'art des combinaisons tous les mots possibles que l'on peut faire de toutes les lettres de l'Alphabet ; car entre ces mots, tous les termes de la Langue de la Chine s'y trouveront nécessairement. On parlera des combinaisons dans la suite.

Seconde Regle.

3. *Pour découvrir quel est l'état de la Question, il*

faut retrancher ce qu'il n'est point nécessaire d'examiner pour arriver à la connoissance de la vérité que l'on cherche, & suppléer les choses qui sont nécessaires.

Ceux qui proposent des Questions y joignent quelquefois des conditions qui semblent nécessaires, quoiqu'elles ne le soient pas. Comme dans cette Question : *J'ai vû*, dit-on, *des Chasseurs, ou plutôt des Pêcheurs qui emportoient avec eux ce qu'ils ne prenoient pas, & qui jettoient dans l'eau ce qu'ils prenoient.* L'esprit étant préoccupé de l'idée de Pêcheurs qui pêchent du poisson, il ne peut concevoir ce que l'on veut dire ; & toujours la difficulté qu'il y a pour résoudre cette Question, vient de ce qu'on ne pense pas que des Chasseurs & des Pêcheurs aussi bien que d'autres hommes, cherchent quelquefois dans leurs habits certains petits animaux qu'ils jettent s'ils les attrapent, & qu'ils emportent avec eux s'ils ne peuvent les attraper. Ainsi il n'étoit point nécessaire de parler dans cette Question de Chasseurs ni de Pêcheurs.

Quelquefois aussi on ne met pas dans une Question tout ce qui est nécessaire ; comme dans celle-ci. *Rendre un homme immobile sans le lier ; c'est-à-dire, lui faisant mettre seulement son petit doigt dans son oreille, le rendre par cette posture comme immobile, en sorte qu'il ne puisse sortir du lieu où on l'aura mis jusqu'à ce qu'il ôte son petit doigt de son oreille.* La condition que l'on ne dit pas, est que l'on doit faire embrasser un arbre à celui qui met son petit doigt dans son oreille, ensorte que cet arbre soit enfermé entre son bras & son oreille. Cette condition étant mise, il n'y a plus de Question.

TROISIEME REGLE.

4. *Quand on a retranché d'une Question tout ce qui ne servoit qu'à la rendre plus embarrassée, & que l'on a suppléé les conditions nécessaires que l'on ne disoit pas, & qu'ainsi on voit clairement ce qu'il faut chercher ; pour soulager l'esprit dans cette recherche, il faut donner un nom à chaque terme de la Question, & l'exprimer par un caractere sur le papier.*

Cela arrête l'imagination, & empêche que l'on ne s'embrouille, & que l'on n'oublie les découvertes que l'on a faites. Ainsi dans la Question que l'on a faite ci-dessus, des âges des trois personnes différentes, pour fixer mon esprit ; j'appelle x l'âge du premier, z celui du second, & y celui du troisiéme. Ces caracteres me rendent plus facile l'attention que je dois donner à cette Question : & quand j'aurai fait quelque découverte, je la marquerai, pour ne la pas oublier. Par exemple, connoissant par la proposition qui a été faite de la présente Question, que l'âge de la premiere personne que j'ai nommé x, est moindre de cinq années que l'âge de la seconde, qui est marqué par la lettre z, je découvre que x plus cinq années est égal à z, ce que je marque de cette maniere $x + 5 = z$. Et ensuite je continue l'examen de cette Question, donnant à chaque chose mon esprit tout entier, parce que je ne suis point obligé de conserver dans ma mémoire ma premiere découverte, l'ayant laissée comme en dépôt sur le papier.

QUATRIEME REGLE.

5. *En marquant par des signes les Grandeurs qui*

ſont le ſujet de la Queſtion, il faut diſtinguer par des ſignes différens celles qui ſont connues d'avec celles qui ne le ſont pas.

Si tout étoit connu dans une Queſtion, ce ne ſeroit pas une queſtion, comme on l'a remarqué. On ne s'aviſe pas de demander ſérieuſement quelle eſt la grandeur qui eſt la moitié de 24, & qui eſt égale à 12. Si tout étoit inconnu, ce ne ſeroit pas auſſi un ſujet de Queſtion. Si un homme me propoſoit ſimplement de découvrir quel nombre il a penſé, ſans me dire autre choſe, je lui répondrois que je ne ſuis pas devin. Dans une Queſtion raiſonnable il y a toujours quelque grandeur connue qui ſe trouve mêlée avec des grandeurs inconnues, il les faut diſtinguer; ce qu'on peut faire, marquant celles qui ſont connues avec les premieres lettres de l'alphabet a, b, c, d, & ſe ſervant des dernieres lettres x, y, z, pour marquer les inconnues. Cela ſoulage encore l'imagination, & fait appercevoir ſenſiblement ce qu'il faut chercher dans une Queſtion. C'eſt toujours la valeur de x, ou de z, ou de y, que l'on cherche.

Quand dans la Queſtion propoſée l'on y parle de pluſieurs grandeurs de différentes eſpéces, on peut les marquer avec les premieres lettres de leur nom. Si l'on parloit, par exemple, de piſtoles, d'écus, de ſols, on pourroit appeller les écus e, les piſtoles p, les ſols $ſ$. Tout cela ſert merveilleuſement à faciliter la réſolution d'une Queſtion, aidant l'imagination, ſans le ſecours de laquelle la plûpart des hommes ne peuvent rien concevoir; outre que cela abrege fort le diſcours, ſans le rendre néanmoins obſcur, parce que ces ſignes ſont ſimples & faciles à connoître. Je ſuppoſe qu'on les réduit à un petit nombre; car autrement bien

loin de rendre le discours clair en l'abrégeant, ils l'obscurciroient, comme l'expérience le fait connoître, en ce qu'ils composeroient un langage tout nouveau auquel l'on n'est point accoutumé.

CINQUIEME REGLE.

7. *Quand une Question n'est point déterminée par quelque Grandeur particuliere, de sorte que plusieurs Grandeurs peuvent avoir les conditions requises, il faut alors supposer à discrétion quelque Grandeur qui ait les conditions proposées, & détermine ainsi la Question.*

Si on proposoit de trouver en général une grandeur qui fût la sixiéme partie d'une autre grandeur, cette Question seroit indéterminée; car l'on peut trouver une infinité de différentes grandeurs qui seront la sixiéme partie d'une autre grandeur. Je prends donc 30 que je divise par 6, le quotient de cette division, qui est 5, est la sixiéme partie d'une grandeur. Je puis supposer une autre grandeur comme est 24, dont la sixiéme partie est 4; ainsi ces deux nombres 24 & 4 satisfont à la Question, comme font 30 & 5.

SIXIEME REGLE.

8. *Il faut corriger les noms ou les expressions des Grandeurs qui sont le sujet de la Question, & les réduire aux plus simples termes qu'il se pourra faire.*

C'est-à-dire que les expressions dont on se sert doivent être nettes & abrégées, afin qu'on ait moins de peine à se les représenter, & qu'ainsi on puisse plus aisément achever de résoudre la Question; au lieu donc de $x + 5 + x + x + 10$

$+10$, on doit écrire $3x+15$. De même lorsqu'on a des fractions, il faut les réduire aux plus simples termes; au lieu de $\frac{12}{24}$ écrire $\frac{1}{2}$; & si on a plusieurs fractions, les ajouter en une somme. Par conséquent si $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ sont la valeur d'une grandeur donnée, il faut ajouter ces deux fractions, & mettre en leur place leur valeur $\frac{7}{6}$.

Pour épargner la diversité des signes, au lieu de deux grandeurs connues, il en faut mettre une seule qui leur soit égale. Ainsi au lieu de $ax+dx$; prendre c, qui soit égale à $a+d$, & écrire cx. De la même maniere, si la grandeur donnée est $\frac{dx}{3}$, c'est-à-dire, le tiers de dx; je prends une grandeur que je nomme f, qui soit le tiers de d, & au lieu de $\frac{dx}{3}$, j'écris fx, car fx est le tiers de dx. Ces expressions plus simples & moins embarrassées rendent la question plus claire.

SEPTIEME REGLE.

Connoissant les Rapports qui sont entre les termes d'une question, on connoît la différence qui est entre ces termes, & ce qui les rend égaux ou inégaux; par ce moyen on les peut exprimer en deux manieres; ce qui s'appelle faire une Equation. 8.

Pour demeurer dans la même Question des trois âges qui a été proposée ci-dessus, connoissant que z surpasse x de 5, ou que la différence de x de z est 5, je sçais donc que $z-5=x$, ou que $x+5=z$; & que puisque y est le dou-

ble de x & z, il faut que $2x+2z$ soit égale à y. Ainsi je puis exprimer ces grandeurs en deux manieres, nommer $x+5$ la grandeur z, & $2x+2z$ la grandeur y. C'est cette double expression qui s'appelle *Equation*. Remarquez que j'ai examiné cette Question comme si tout étoit fait. J'ai donné des noms aux choses comme si je les connoissois, après quoi j'ai considéré leurs différences; j'ai, dis-je, parcouru la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement leurs rapports, ce qui m'a fait trouver le moyen d'exprimer une même grandeur en deux façons; & cela, comme nous l'avons dit, s'appelle avoir une *Equation*. J'ai trouvé que $x+5=z$, & $2x+2z=y$.

HUITIEME REGLE.

9. *Il faut trouver autant d'Equations qu'il y a de Grandeurs inconnues, & faire ensorte que dans l'expression du Problême, il n'y ait qu'une seule Grandeur inconnue.*

Il est évident que la fin de tout ce que l'on fait dans l'examen d'une question, c'est en comparant les grandeurs inconnues avec celles qui sont connues, de connoître, si cela se peut, ce qui les rend inégales ; ou ce qu'il faudroit ajouter ou retrancher, plus ou moins, afin qu'elles fussent égales. Ainsi ayant examiné toutes les conditions d'un Prôblême, il faut trouver autant d'Equations qu'il y a de grandeurs inconnues, de sorte qu'il n'en reste qu'une seule inconnue, c'est-à-dire, que de toutes les lettres qui marquent les grandeurs inconnues, il ne doit rester qu'une seule lettre qui soit inconnue. Par exemple, dans la Question ci-dessus proposée, puisque je sçai

que $x+5$ eſt égal à z, qui eſt le ſecond âge, je n'appelle plus ce ſecond âge z, mais $x+5$; & puiſque le troiſiéme âge y eſt le double de x & de $x+5$, je n'appelle plus y le troiſiéme âge, ni $2x+2z$, mais $2x+2x+10$; laquelle expreſſion $2x+2x+10$, étant corrigée, ſe réduit à celle-ci $4x+10$; ainſi les trois grandeurs x, z, y, étant réduites à celles-ci x, $x+5$, $4x+10$, elles n'ont qu'une de ces lettres qui marquent les inconnues, ſçavoir x. Cela rend la Queſtion bien plus ſimple, la réduiſant à la recherche d'une ſeule grandeur inconnue. Dans l'exemple propoſé, il n'eſt plus queſtion que de chercher la valeur de x, qu'on trouve après facilement, comme nous le verrons dans la ſuite. Mais puiſque la ſomme de trois âges $x+x+5+4x+10$, eſt égale à 75, donc après avoir corrigé cette expreſſion, & l'avoir réduite à celle-ci $6x+15$, qui eſt plus ſimple, j'ai cette Equation $6x+15 = 75$, c'eſt-à-dire, une double expreſſion de la même grandeur, car $6x+15$ & 75 ont une même valeur.

NEUVIÉME REGLE.

Quand les Grandeurs connues ou inconnues ſe trouvent mêlées enſemble, il faut les ſéparer, & transporter d'un côté tout ce qui eſt connu, & de l'autre ce qui eſt inconnu. 10.

On appelle *membres* d'une Equation ce qui eſt de part & d'autre du ſigne de l'égalité; ainſi $6x+15$ & 75 ſont les membres de cette équation $6x+15=75$. Or quand dans l'un des membres d'une équation la grandeur inconnue ſe trouve toute ſeule, & que dans l'autre membre il n'y a que des grandeurs connues, il eſt évident que

cette grandeur n'est plus inconnue. Si $x = 10$, je sçai que la valeur de x est 10. Pour achever donc la question, il faut faire passer dans l'un des membres tout ce qui est connu, & dans l'autre tout ce qui est inconnu ; de maniere que le rapport de la grandeur inconnue avec les grandeurs inconnues soit net. Par exemple, dans cette équation $6x + 15 = 75$, la grandeur x se trouvant mêlée avec $+ 15$, je rejette cette grandeur connue 15 de l'autre côté, de cette maniere $6x = 75 - 15$, ce que je fais en retranchant de chaque membre cette grandeur 15 ; & cela ne trouble point l'Equation, puisque de deux choses qui sont égales, si on en retranche choses égales, elles demeurent égales.

Dixiéme Regle.

11. *Il faut réduire aux plus simples termes cette raison ou rapport d'égalité, qui est entre les deux membres de l'Equation.*

Ainsi au lieu de $6x = 75 - 15$, j'écris $6x = 60$, car $75 - 15$, c'est la même chose que 60. Je réduis encore cette Equation ou rapport $6x = 60$ à de moindres termes, divisant ces deux termes $6x$ & 60 par 6. Cette division donne x & 10, qui sont encore en même raison, puisque divisant deux grandeurs par un même diviseur, elles gardent entr'elles la même raison qu'elles avoient auparavant. Ainsi $x = 10$, après quoi on connoit sensiblement la raison de l'inconnue x avec ce qui est connu. Toute la question se trouve donc résolue ; car puisque x vaut 10, que $x + 5 = z$, donc $10 + 5 = z$, donc z vaut 15 : & puisque $2x + 2z = y$, donc y vaut 50 : Par conséquent le premier âge est 10, le second 15, le troi-

fiéme eſt 50, la ſomme deſquels âges eſt 75 années.

Ainſi lorſqu'on ſuit la méthode que nous avons preſcrite, l'on trouve enfin la réſolution de la Queſtion. Ce n'eſt point par hasard, c'eſt en ſuivant une méthode judicieuſe & naturelle. Pour marque de cela, c'eſt que ſi le Problême ne peut pas être réſolu, on en découvre l'impoſſibilité.

Un Problême eſt impoſſible, ou abſolument, ou par rapport à nos connoiſſances. Un Problême eſt abſolument impoſſible, lorſqu'il renferme une contradiction, comme celui-ci, *Trouver un nombre qui ſoit le tiers de 12, & qui ſoit égal à 5*, cela eſt impoſſible, car le tiers de 12 eſt 4. Ainſi l'on demande de trouver un nombre égal en même tems à 4 & à 5, ce qui renferme une contradiction. Or en ſuivant la méthode preſcrite, l'on reconnoît ſi un Problême eſt abſolument impoſſible; car, par exemple, dans celui-ci ayant ſuppoſé que le tiers de 12 ſe nomme x, j'ai cette Equation $3x = 12$: & puiſque x eſt égal à 5, il faut que $3x = 15$; ce qui eſt impoſſible: car $3x = 12$. Ainſi je connois que les deux conditions qui ſont renfermées dans ce Problême ſe combattent, & que par conſéquent ce Problême eſt impoſſible. 12.

Nous connoiſſons auſſi ſi un Problême eſt impoſſible par rapport à nos connoiſſances; car ſi, par exemple, après avoir ſuivi les Regles précédentes, je n'ai pas pu réduire à des termes plus ſimples une Equation, qu'à ceux-ci, $xx = bb + ax$, j'apperçois bien que je ne puis pas ſçavoir quelle eſt la valeur de x, parce que je n'ai point encore de Regles pour connoitre la valeur d'une grandeur inconnue, comme eſt x; quand je ſçai ſeulement que ſon quarré qui eſt xx eſt égal au

quarré d'une grandeur connue, tel qu'est bb plus un plan fait de l'inconnue x & d'une grandeur connue, tel qu'est le plan ax.

Lorsqu'en parcourant la difficulté de la maniere qu'on vient de le dire, on ne trouve point d'Equation, c'est une marque que la question est indéterminée ; car le rapport de deux grandeurs déterminées fait qu'on les peut exprimer en deux manieres. Alors, comme on l'a dit, on suppose des grandeurs à discrétion qui puissent satisfaire à la question.

CHAPITRE III.

De la réduction d'une Equation à une telle expression, que la Grandeur inconnue qu'on cherche, se trouve seule dans un des membres de l'Equation.

13. L'Analyse consiste principalement à couper & tailler une Equation, de sorte qu'on la réduise à une expression simple ; & qu'on délivre la grandeur inconnue de ce qui empêchoit qu'on ne vît précisément son rapport avec les grandeurs connues. Comme dans cette Equation $5x - 1 = 4x + 6$; en ajoutant 1 de part & d'autre, on a $5x = 4x + 7$; & ôtant $4x$ de part & d'autre, on a $x = 7$, où le même rapport d'égalité subsiste. C'est ce qui a fait donner le nom d'Analyse à la méthode dont nous parlons. C'est un mot Grec qui signifie résoudre, couper, délier. Ces réductions se font ajoutant aux membres d'une Equation, ou en en retranchant quelque chose, les multipliant ou les divisant, de maniere que l'égalité qui est entr'eux ne soit point ôtée.

Des Réductions qui se font par Addition.

Si de part & d'autre du signe de l'égalité on ajoute des Grandeurs égales, les membres de l'Equation demeureront égaux, & l'Equation ne sera point troublée. 14.

Si à des grandeurs égales on en ajoute d'égales, elles demeurent égales entr'elles. Ainsi si $x=15$, & qu'on ajoute 5 de part & d'autre, l'Equation reste $x+5=20$. Pour ajouter il suffit d'effacer d'un membre d'une Equation ce qui s'y trouve avec le signe $-$, & l'écrivant dans l'autre avec le signe $+$. Alors l'on ajoute également à l'un & à l'autre membre. Soit cette Equation $x-50=6$. Pour ajouter 50 de part & d'autre, j'efface 50 qui est dans le premier membre avec $-$, & je le mets dans l'autre membre avec le signe $+$ de cette maniere, $x=6+50$; ce qui n'est qu'une expression corrigée & abrégée de l'addition que je fais; car si $x-50=6$, il est certain que $x-50+50=6+50$. Or puisque $-50+50=0$, pour faire cette addition d'une maniere nette, il faut seulement écrire $x=6+50$, ou $x=56$. Ainsi si $a-z=0$, pour ajouter z à l'un & à l'autre membre, j'écris $a=0+z$, ou simplement $a=z$, puisque ce zéro n'augmente point dans ce lieu la valeur de z. Si on a cette Equation $a-2x=6+x$, en transportant $-2x$ dans l'autre membre, & l'écrivant avec $+$, on a cette équation $a=6+x+2x$, ou $a=6+3x$.

Des Réductions qui se font par la Soustraction.

15. *Si de part & d'autre du signe de l'égalité on retranche des Grandeurs égales, l'Equation n'est point troublée.*

De choses égales ôtant choses égales, elles demeurent égales entr'elles : Ainsi si $x+5=20$, retranchant 5 de part & d'autre, l'Equation reste $x=15$. Si $a=6+3x$ ôtant 6 de part & d'autre, reste $a-6=3x$. Or pour faire ce retranchement, il suffit d'effacer d'un membre ce qui s'y trouve avec le signe $+$, & de l'écrire dans l'autre avec le signe $-$. Car pour lors l'on retranche également de l'un & de l'autre membre de l'Equation, & l'on ne fait qu'abréger l'opération ; car si $x+50=80$, il est évident que $x+50-50=80-50$. Or puisque $+50-50$ ne fait rien, pour retrancher 50 de part & d'autre, il ne faut qu'écrire $x=80-50$ ou $x=30$.

Des Réductions qui se font par la Multiplication.

16. *Lorsque l'on multiplie les deux membres d'une Equation par un même multiplicateur, l'on ne trouble point cette Equation.*

En multipliant les deux termes d'une raison par une même grandeur, les produits sont en même raison que les grandeurs multipliées. Ainsi si l'on multiplie les deux membres de cette Equation $\frac{z}{a}=b$, par a l'on aura cette Equation $z=ba$;

car puisque la raison de $\frac{z}{a}$ avec b est une raison d'égalité, la raison de z avec ba qui est la même, sera aussi une raison d'égalité. Ainsi si $\frac{z}{3} = 6$, multipliant l'un & l'autre membre par 3, l'on aura $x = 18$.

Si $\frac{zz}{z - b} = a$, puisqu'en effaçant le dénominateur $z - b$ du premier membre, ce membre est censé être multiplié par $z - b$, en multipliant a par $z - b$, on aura cette réduction $zz = az - ab$. Par la même raison, si $\frac{zz}{a} = \frac{zz - bz + bb}{z}$; pour multiplier ces deux membres par a; j'efface a du premier, & je multiplie les parties du second par a; & j'ai $zz = \frac{azz - abz + abb}{z}$. En multipliant cette Equation ainsi réduite par z, on a cette Equation encore plus simple $zzz = azz - abz + abb$, selon le même principe, que pour multiplier une fraction par son dénominateur, il ne faut qu'effacer ce dénominateur.

C'est ce qui fait connoître que pour délivrer une Equation des fractions quand elle en a, il n'y a qu'à la multiplier par le dénominateur de la fraction. S'il y a des Fractions dans les deux membres de l'Equation, il faut faire la même chose, comme ici $zz = \frac{zz - bz + bb}{z}$, je multiplie, 1°. l'un & l'autre membre par a, ce qui produit $zz = \frac{azz - abz + abb}{z}$. 2°. Je multiplie l'un & l'autre membre par z, & j'ai $z^3 = az^2 - abz + abb$. Ainsi il n'y a plus de fraction.

Des Réductions qui se font par la Division.

17. *Lorsque l'on divise les deux membres d'une Equation par la même Grandeur, l'Equation demeure.*

Les deux termes d'une raison étant divisés par une même grandeur, les quotiens de ces divisions sont en même raison que ces deux termes. Si $zz = 4z$, divisant les deux membres par z, on aura $z = 4$. Si $z^4 = az^3 + bbzz$, divisant cette Equation par zz, on aura $z^2 = az + bb$. De même, si $3z = 12$, divisant par 3, viendra $z = 4$. Si $az = ab$, divisant par a, on aura $z = b$. Cette Equation $azz + bzz = abz + bbz - abb - b^3$; pouvant être divisée par $a + b$. on la réduit par cette division à celle-ci $zz = bz - bb$. On doit ici se souvenir des Regles que nous avons données, Liv. 1. n. 39. pour diviser les grandeurs marquées par des lettres.

Des Réductions qui se font par l'extraction des Racines, & en abaissant une puissance.

18. *En tirant les Racines de chaque membre d'une Equation, l'on ne trouble point cette Equation.*

Cette Regle est fondée sur ce principe, que les puissances égales ont des racines égales. Si donc $xx = 25$, en prenant les racines de xx, & de 25, il faut que x racine de xx, & 5 racine de 25 soient égales; ainsi $x = 5$. Vous voyez qu'on abaisse la puissance xx d'un degré. Ainsi si $z^3 = 125$, ayant tiré la racine cubique de l'un &

l'autre membre, on aura $z=5$, ayant de meme extrait la racine quarrée de part & d'autre dans cette Equation $zz=aa+2ab+bb$, elle sera réduite à celle-ci $z=a+b$.

Des Réductions qui se font en élevant une puissance à un plus haut dégré.

En élevant chaque membre d'une Equation à un plus haut & même degré, l'on ne trouble point cette Equation. 19.

Car comme les racines des grandeurs égales sont égales, aussi les grandeurs qu'on regarde comme des racines, demeurent égales entr'elles, si on les éleve à un même degré : ce qui est fort utile pour se délivrer des grandeurs incommensurables ; car si j'ai cette Equation $\sqrt{z}=5$, en élevant ces deux grandeurs à un même dégré, c'est-à-dire, prenant le quarré de $\sqrt{z}$, qui est z, & celui de 5, qui est 25, je réduis l'Equation $\sqrt{z}=5$ à celle-ci $z=25$. Car il est évident que pour quarrer une grandeur qui a le signe radical, il suffit d'ôter ce signe. Le quarré de $\sqrt{xx}$ est xx : celui de $\sqrt{xx+yy}$, est $xx+yy$.

Des Réductions qui se font par la Substitution.

Il ne faut pas oubliet la réduction qui se fait par la substitution, c'est-à-dire, mettant au lieu d'une grandeur inconnue ou incommode, quelqu'autre grandeur connue, ou qui facilite la résolution de la question. On en a déja vû des exemples dans le Probléme des trois âges, où en la place des grandeurs z & y, on a mis $x+5$ pour z, & $4x+10$ pour y. 20.

Réduction par la transposition.

21. On peut réduire une Equation, de maniere que la grandeur inconnue se trouve seule d'un côté, ce qui se fait en transposant les grandeurs, 1°. Par l'Addition ou par la Soustraction. Car, par exemple, si l'Equation donnée est $x - a = b$: on peut transporter a, afin que x soit seul, en ajoutant a de part & d'autre ; ainsi $x = b + a$. Si la grandeur a eût été jointe avec x par le signe $+$, il auroit fallu retrancher a de côté & d'autre, ce qui eût donné $x = b - a$. On fait aussi cette transposition par la multiplication & par la division ; & l'on délivre une grandeur de celle avec qui elle se trouve mêlée. Soit, par exemple, cette Equation $\frac{x}{3} = b$, pour ôter 3 du premier membre, je multiplie le premier membre $\frac{x}{3}$, & le second qui est b par 3, ce qui me donne cette Equation $x = 3b$, dans laquelle x est dégagée de toute autre grandeur. Si l'Equation donnée eût été $3x = b$, en divisant les membres de cette Equation par 3, je l'aurois réduite à celle-ci, $x = \frac{b}{3}$, où x se trouve toute seule, & 3 est transporté de l'autre côté.

Ces réductions changent tellement une Equation, qu'on n'en apperçoit ni l'origine, ni le progrès, à moins qu'on ne les fasse soi-même. C'est ce qui fait la difficulté des Livres d'Algebre. Voyons-le dans un exemple.

Soit cette Equation

$$\sqrt{\frac{a^4 + 8aabb - 32aacc + 30aa + 81}{\sqrt{aa + 3}}} =$$

$\sqrt{aa+27}$ en quarrant, ce qui se fait ôtant les radicaux, on aura

$$\frac{a^4+8aabb-32aacc+30aa+81}{aa+3}=aa+27.$$

Multipliant par $aa+3$, on trouve $a^4+8aabb-32aacc+30aa+81=a^4+30aa+81$. Effaçant de part & d'autre les quantités égales, l'Equation se réduit à $8aabb-32aacc=0$. Faisant passer $32aacc$ de l'autre côté du signe d'égalité, on aura $8aabb=32aacc$. Divisant l'un & l'autre membre par $8aa$, il vient $bb=4cc$. Extrayant la racine quarrée, on a enfin $b=2c$, qui est fort différente de sa premiere forme.

CHAPITRE IV.

Principes des Equations ou moyen de trouver de doubles expressions qui facilitent la résolution d'un Problême.

TOutes ces réductions dont nous venons de parler, supposent qu'on a trouvé des Equations, c'est-à dire, de doubles expressions des grandeurs dont on cherche la valeur, que la seule maniere dont un Problême est énoncé, fait connoître. Par exemple, si on propose que z est trois fois plus grand que x. je conclus que trois fois x est égal à z, qu'ainsi z se peut nommer $3x$; j'ai donc une double expression de la même grandeur, & par conséquent cette Equation $z=3x$. C'est ainsi que par les rapports qu'ont entr'elles les grandeurs, qui sont les termes de la Question, on trouve des Equatious. Or tout rapport, comme nous avons vû, est ou différence ou raison; ainsi 224

pour égaler des grandeurs, dont on connoit les rapports, & par conséquent pour les exprimer en deux manieres, il faut considérer leurs différences, ou les raisons qu'elles ont entr'elles.

La différence de deux Grandeurs est l'excès de la plus grande par-dessus la plus petite, ou le défaut de la plus petite au-dessous de la plus grande. Ainsi en ajoutant cette différence à la plus petite, on l'égale à la plus grande; & en retranchant cette différence de la plus grande, on l'égale à la plus petite. Si la différence de x à z est 10, que x soit plus petit que z; donc $x+10=z$, ou $x=z-10$; ce qui me donne de doubles expressions des grandeurs x & z. Je puis nommer $x+10$ la grandeur z, & $z-10$ la grandeur x, selon que cela me sera plus commode; & ainsi au lieu de l'une substituer l'autre, de sorte que je n'aie qu'une lettre inconnue.

Dans une somme composée de deux parties, la différence de cette somme à l'une de ses parties, est l'autre partie. Par exemple, si a & b sont les parties de z, la différence de z à a est b, & sa différence à b est a; ainsi $z-a=b$, & $z-b=a$.

Dans une proportion Arithmétique, les extrêmes ajoutés ensemble font une somme égale à l'addition des moyens. Ainsi si $\div$ *a. b. c. d.* donc
23. $a+d=b+c$.

La moitié de la somme de deux Grandeurs inégales, plus la moitié de la différence de ces Grandeurs, est égale à la plus grande; & moins cette même moitié, à la plus petite. Par exemple, soient ces deux lignes *AB* & *BC* jointes ensemble, leur différence est *DB*, & les lignes *AE* & *EC* sont les deux moitiés de *AC*.

A D E B C

Il eſt évident que *CE* moins *BE* moitié de la différence de ces deux lignes, eſt égale à *BC* la petite ligne, & que *AE* plus *DE* ou *EB* moitié de la même différence eſt égale à *AB* : Soit donc *AC* égale à $2x$, & que *AB* ſoit égale à y, & *BC* à z, que leur différence *DB* ſoit 12 ; donc $x+6=y$ & $x-6=z$. Ainſi on peut nommer $x+6$ la grandeur y, & nommer $x-6$ la grandeur z : par ce moyen on leur donne en quelque maniere le même nom, ce qui eſt d'une très-grande utilité, comme on verra dans la ſuite.

Quand on connoît quelle raiſon il y a entre deux Grandeurs, on les peut égaler facilement; car il eſt évident que ſi x eſt le tiers de z, il faut que x pris trois fois ſoit égal à z, comme nous l'avons dit ; & qu'ainſi $3x=z$; ou que $\frac{1}{3}z=x$. Si m eſt à n comme 2 à 3, donc $m=\frac{2}{3}n$, ou $3m=2n$.

Puiſque dans une proportion Géométrique le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens ; ſi $\div\!\!\div\ a.\ b.\ c.\ d.$ donc $ad=bc.$, & $ac=bb$, & $\frac{bc}{a}=d$; ainſi l'on peut tirer de la connoiſſance que l'on a des raiſons qui ſont entre les Grandeurs propoſées, des moyens aſſez faciles de les égaler, ou de trouver entr'elles des Equations ; ce qui eſt la même choſe.

Lorſqu'on ſçait que le quarré d'une Grandeur inconnue eſt égal à une connue, il ne faut que l'élever d'un degré. Je ſçai que le quarré de x eſt égal à d. donc $xx=d$: Au contraire ſi je ſçai que la racine de x eſt égale à d, je conclus, donc $x=dd$.

Une chose qu'on ne peut trop dire en cette matiere, c'est que le succès de la peine qu'on prend pour résoudre un Problême dépend très-souvent des expressions heureuses dont on se sert, en donnant aux Grandeurs dont on parle dans une Question, des signes convenables, ou mettant le tout pour toutes les parties, ou toutes les parties pour le tout, distinguant le tout en tant & tant de parties, selon que le nombre qu'on choisira sera plus commode. On le va voir dans la résolution des Problêmes suivans.

CHAPITRE V.

Application des précédentes regles de l'Analyse à des Problêmes particuliers. Comment on résout ces Problêmes selon la méthode ancienne par des Regles de deux fausses positions ; où il est aussi parlé de la Regle d'Alliage. Quelles sont ces Regles ?

Quoique tout ce qu'on vient de voir soit intelligible, rendons-le encore plus clair & plus sensible ; faisant une application de tout cela à quelques Problêmes.

PROBLEME.

24. *Une personne ayant rencontré des pauvres, & leur ayant voulu donner à chacun cinq sols, elle a trouvé qu'il lui manquoit un sol ; ainsi ne leur ayant donné à chacun que quatre sols, il lui en est resté six. Combien y avoit-il de pauvres, & combien cette personne avoit-elle de sols ?*

Il faut tirer la ſolution de ce Problême du Problême même, c'eſt-à-dire, la connoiſſance de ce qu'on ignore, de la ſeule maniere dont il eſt propoſé. 1°. Il faut exprimer ſur le papier la choſe dont il eſt queſtion, la ſuppoſant faite comme le Problême dit qu'elle l'eſt, pour cela lui donnant des noms. Je nomme x le nombre des pauvres qui ne m'eſt pas connu, & z celui de l'argent qu'a cette perſonne, qui m'eſt pareillement inconnue.

Je conſidere les rapports que les Grandeurs inconnues x & z ont enſemble, afin que je puiſſe repréſenter la choſe comme on ſuppoſe qu'elle eſt. Puiſque cette perſonne ayant voulu donner à chaque pauvre cinq ſols, elle en avoit un de trop peu ; donc cinq fois le nombre des pauvres moins un ſol, c'eſt-à dire, $5x - 1$ eſt égal au nombre de ſols de cette perſonne, c'eſt à-dire, à z. Ainſi le rapport de x & de z me fait trouver cette double expreſſion ou Equation $5x - 1 = z$.

Il faut, 2°. comme on a dit, faire enſorte que dans une Queſtion il n'y ait qu'une Grandeur inconnue ; & pour cela trouver autant d'Equations qu'il y a de Grandeurs inconnues dans la Queſtion. Je cherche donc une autre double expreſſion de z, conſidérant les autres rapports que peuvent avoir ces deux Grandeurs x & z ; ſelon que la Queſtion eſt propoſée. Puiſque cette perſonne donnant 4 ſols à chaque pauvre, elle en a 6 de reſte, donc en multipliant x le nombre de pauvres par 4, ce qui fait $4x$, & y ajoutant ſix ſols, on fait une grandeur égale à z, qui eſt ſon argent. $4x + 6 = z$.

Or puiſque $5x - 1 = z$, & que $z = 4x + 6$, donc $5x - 1 = 4x + 6$. Il n'y a dans cette derniere Equation que x d'inconnu. Mais il faut

faire enforte que x se trouve d'un côté délivré de toute autre grandeur, & qu'il soit précisément égal à une grandeur connue. Je fais donc cette réduction. 1°. En ajoutant 1 de part & d'autre de cette Equation, ce qui fait $5x = 4x + 7$. 2°. En ôtant $4x$ de l'un & de l'autre membre de l'Equation, après quoi il reste $x = 7$; par conséquent x, qui est le nombre des pauvres, vaut 7. Il y avoit donc sept pauvres. Or $4x + 6 = z$, c'est-à-dire, 4 fois sept plus six, ou 28 plus six sont égaux à z: donc $z = 34$. Ainsi cette personne avoit 34 sols.

Faisons encore l'application des regles de l'Analyse à la question suivante, mais sans tant de paroles.

25. *Alexandre étoit plus âgé qu'Epheſtion de deux ans, Clitus avoit quatre ans plus que la somme des deux âges d'Alexandre & d'Epheſtion, & leurs trois âges faisoient 96 ans. On demande quel étoit l'âge d'un chacun.*

L'âge d'Epheſtion soit appellé x, celui d'Alexandre z, & celui de Clitus y. Puisqu'Epheſtion a deux ans de moins qu'Alexandre, donc $x + 2 = z$; & puisque Clitus étoit aussi âgé que tous deux ensemble, & de quatre ans davantage; donc $x + z + 4 = y$. Au lieu de z on peut substituer son égale $x + 2$; ainsi $x + x + 2 + 4 = y$, laquelle Equation étant corrigée, $2x + 6 = y$. Les trois âges inconnus $x.\ z.\ y.$ se peuvent donc exprimer de cette maniere où il n'y a qu'une inconnue: $x.\ x + 2.\ 2x + 6$. Or ces trois âges réduits dans une somme qui est $4x + 8$, font 96, selon que la question est proposée; donc on a cette Equation $4x + 8 = 96$. Il faut faire passer ce qui est connu d'un côté; pour cela je retranche 8 de part & d'autre, & j'ai $4x = 88$, ensuite pour

délivrer l'inconnue x du chiffre 4, je diviſe l'un & l'autre membre par 4, après quoi j'ai $x=22$: donc l'âge d'Epheſtion eſt 22 ans, celui d'Alexandre, qui a deux ans par deſſus, 24 ans; & par conſéquent celui de Clitus 50.

De la Regle de deux fauſſes poſitions.

Dans l'Arithmétique ordinaire, pour réſoudre 26.
les Problèmes que nous venons de propoſer, l'on ſuppoſe des nombres qui ayent quelqu'une des conditions qui appartiennent aux nombres inconnus que l'on cherche. On fait deux ſuppoſitions de nombres, qu'on nomme fauſſes ſuppoſitions, parce qu'effectivement les nombres ſuppoſés ne ſont pas les véritables que l'on cherche, quoique par leur moyen on les trouve. Pour montrer comment cela ſe fait, je vais réſoudre le dernier Problème par cette regle. Je ſuppoſe des nombres qui ayent les conditions marquées dans la queſtion ; après j'ajoute ces nombres dans une ſomme, & j'obſerve quelle eſt la différence entr'eux & le nombre 96, qui eſt la ſomme connue des trois âges. Cette différence ſe marque avec $+$ & $-$. Je ſuppoſe donc que l'âge d'Epheſtion eſt 16 ans, ainſi celui d'Alexandre eſt 18, & celui de Clitus eſt 38. Or $16+18+38$ ne ſont pas 96, il s'en faut 24; par conſéquent les nombres que j'avois ſuppoſés ne ſont pas les véritables ; je les écris néanmoins $16+18+38=96-24$. Je fais cette ſeconde ſuppoſition, que l'âge d'Epheſtion eſt 21, & qu'ainſi celui d'Alexandre eſt 23, & celui de Clitus eſt 48. Or $21+23+48=96-4$; donc cette ſeconde ſuppoſition eſt encore fauſſe. Pour trouver les nombres véritables, il faut faire évanouir les diffé-

rences $-24-4$, afin que d'un côté on trouve trois nombres, qui, outre cette premiere condition marquée dans la question qu'ont les nombres qu'on vient de supposer, ayent encore la seconde, c'est-à-dire, qu'ils se trouvent précisément égaux à 96. Voilà le principe des Regles qu'on donne, que je vais expliquer, qui servira ici & ailleurs.

On peut faire évanouir d'une Equation une Grandeur embarrassante ; ajoutant cette Equation avec une autre, dans laquelle se trouve cette même Grandeur, avec un signe contraire. Par exemple, si $x=d-6$; & $z=d+6$, pour faire évanouir le nombre 6, j'ajoute ces deux Equations; & les ayant corrigées, cela fait $x+z=2d$, où 6 ne paroît plus ; car -6 avec $+6$ ne fait rien. Si la même Grandeur se trouve dans les deux Equations avec le même signe ou $-$ ou $+$, il faut soustraire une de ces Equations de l'autre. Par exemple, si $x=d-6$, & $z=b-6$, je retranche l'un de l'autre, & il reste $x-z=d-b$, dans laquelle Equation 6 ne paroît plus; car quand on retranche $b-5$ de $d-5$, ou $b+5$ de $d+5$, abrégeant l'expression de l'opération, le reste est $d-b$. Or pour faire que deux Equations ayent ainsi une même grandeur qu'on puisse faire évanouir, il faut multiplier réciproquement les membres de l'une par une grandeur qui se trouve dans l'autre Equation, de cette maniere. Soient ces deux Equations $x=c-2$, & $z=d-6$; je multiplie les membres de la premiere par 6, & ceux de la seconde par 2 ; ce qui me donne ces Equations $6x=6c-12$, & $2z=2d-12$; dans lesquelles se trouve la même grandeur 12 avec le même signe, sçavoir $-$. Otant une de ces Equations de l'autre

Equation, j'aurai $6x - 2z = 6c - 2d$, où 12 ne paroît point.

Suivant ces principes, pour résoudre la question des âges d'Alexandre, d'Epheſtion & de Clitus ; c'eſt-à-dire, pour réſoudre ces deux Equations $16 + 18 + 38 = 96 - 24$, & $21 + 23 + 48 = 96 - 4$; il faut, 1°. multiplier la premiere Equation par la différence de la ſeconde ſuppoſition qui eſt 4, c'eſt-à-dire, $16 + 18 + 38 = 96 - 24$ par 4, ce qui donne cette Equation $64 + 72 + 152 = 384 - 96$; & multiplier la ſeconde Equation par 24, qui eſt la différence de la premiere ſuppoſition, c'eſt-à-dire, $21 + 23 + 48 = 96 - 4$ par 24, ce qui donne $504 + 552 + 1152 = 2304 - 96$. 2°. Il faut retrancher la plus petite de ces Equations de la plus grande, & il reſtera $440 + 480 + 1000 = 1920$, dans lequel reſte -96, & 96 ne paroiſſoit plus; ainſi cette différence eſt évanouie, comme on le ſouhaitoit. Or puiſque 96 étoit 24 fois dans 2304 produit de 96 multiplié par 24, & qu'il étoit 4 fois dans 384 produit de 96 multiplié par 4; ayant ôté 384 de 2304, il faut qu'il y ſoit 24 fois, moins 4 fois, c'eſt-à-dire, 20 fois, dans le reſte, qui eſt 1920. C'eſt pourquoi la Regle dit que pour réduire la derniere Equation à de plus ſimples termes, il la faut diviſer par la plus grande différence 24 moins la petite, qui eſt 4, c'eſt-à-dire par 20. Après cette diviſion par 20, l'on a cette Equation $22 + 24 + 50 = 96$, qui me fait connoître que l'âge d'Epheſtion eſt 22, celui d'Alexandre 24, celui de Clitus 50. Si les différences des deux ſuppoſitions avoient été $+4$ & $+24$, au lieu qu'elles étoient -4 & -24, il auroit fallu faire la même choſe, c'eſt-à-dire, les retrancher l'une de l'autre. Mais ſi elles avoient été -4 & $+24$, ou

—24 & +4, après avoir multiplié chaque supposition par la différence de l'autre supposition, au lieu de les retrancher l'une de l'autre pour faire évanouir les différences, il auroit fallu les ajouter ; ce qui est évident, & de plus, a déja été dit dans la page précédente.

Nous avions résolu le même Problême en deux coups de plume. Aussi je n'ai proposé cette derniere Méthode, que pour donner la démonstration de cette Regle de deux fausses positions, qui s'enseigne dans les Livres de l'Arithmétique ordinaire.

De la Regle d'Alliage.

27. Lorsque l'Alliage de plusieurs choses de différente nature est fait, il est facile de connoître la valeur de chaque partie du tout composé de cet Alliage, quand le prix du tout est connu. Par exemple, un Marchand a mis dans un vaisseau qui tient 300 pintes, 100 pintes de vin à 5 sols, 100 autres à 3 sols, & 100 autres à 10 sols la pinte. Ces 300 pintes ainsi mêlées les unes avec les autres valent 90 livres ou 1800 sols, on demande combien chacune doit valoir après ce mêlange. C'est la trois-centiéme partie de 90 livres, ou de 1800 sols, qui est 6 sols. Ainsi si on ne proposoit que de trouver le prix de chaque pinte de ce vin qui est mêlé, la question seroit aisée.

Mais lorsque l'Alliage n'est point encore fait, & que l'on a assigné un certain prix moyen avec lequel il faut allier deux ou plusieurs choses de different prix, il y a plus de difficulté. La Regle que l'on donne pour faire cet Alliage, n'est pas fort différente de la Regle de deux fausses positions. Tout l'artifice consiste à trouver combien

de fois il faut prendre chacune des choſes données, pour être alliées avec une certaine grandeur moyenne, afin qu'elles faſſent une ſomme précisément égale à cette grandeur moyenne priſe exactement autant de fois. Cela ſe comprendra mieux par un exemple.

L'on ordonne à un Marchand de vendre ſon vin 6 ſols la pinte; le Marchand n'a que deux ſortes de vin, le premier que je nomme x vaut 3 ſols la pinte, & le ſecond que je nomme z en vaut 8. Afin qu'il ne perde point, il faut qu'il allie ces deux ſortes de vin, de maniere qu'un certain nombre de pintes de vin qu'il aura mêlé, vaille préciſément 6 ſols, lequel prix moyen je nomme a. Il faut marquer ce rapport de x avec a, & celui de z avec le même a; ce qui donne ces deux Equations $x = a - 3$, & $z = a + 2$. Selon la Regle d'Alliage, 1°. il faut multiplier la premiere Equation par 2, qui eſt la différence de la ſeconde Equation; ce qui donnera cette Equation $2x = 2a - 6$, & multiplier la ſeconde Equation par 3, qui eſt la différence de la premiere Equation; ce qui donne $3z = 3a + 6$. 2°. Il faut ajouter ces deux Equations dans une ſomme, ce qui fait $2x + 3z = 5a$. Cette Equation me fait connoître que deux pintes de vin à 3 ſols avec trois pintes de vin à 8 ſols font 5 pintes de la valeur de 5 pintes de vin à 6 ſols. Ainſi ſi ce Marchand, pour faire cette alliage, prend deux pintes de vin à trois ſols, il faut qu'il prenne trois pintes de vin à 8 ſols pour ne tromper perſonne, & n'être pas trompé lui-même.

Vous voyez que cette Regle a les mêmes fondemens que la Regle de deux fauſſes poſitions. Pour faire évanouir les différences -2 & $+3$, on multiplie chacune de ces deux Equations par

la différence de l'autre Equation ; & comme ces différences ont les signes contraires, on ajoute en une somme les Equations, après laquelle addition ces différences s'évanouissent, comme on l'a dit.

Quand on veut allier plusieurs grandeurs différentes avec une moyenne grandeur, il faut faire cet alliage à plusieurs fois. Par exemple, on veut allier x des carolus qui valent 10 deniers, z des sols marqués de quinze deniers, y des piéces de six blancs qui valent 30 deniers, avec des sols. Un sol que je nomme a, est le prix moyen. J'allie premierement x avec y.

$x = a - 2$, & $y = a + 18$. Je multiplie la premiere Equation par 18, & la seconde par 2, ce qui fait $18x = 18a - 36$, & $2y = 2a + 36$. On ajoute ces deux Equations en une somme qui est $18x + 2y = 20a$. Ainsi je sçai qu'il faut mettre 18 carolus avec deux piéces de six blancs, pour faire 20 sols en 20 piéces.

Après cela j'allie z avec x ; car dans cet alliage il faut comparer une grandeur avec une qui soit plus petite que la moyenne, si elle est plus grande que la moyenne ; ou avec une plus grande que la moyenne, si elle est plus petite que la moyenne. Or, selon les rapports que la question me fait connoître que z & x ont avec a, je trouve ces deux Equations $z = a + 3$, & $x = a - 2$. Je multiplie la premiere par 2, & la seconde par 3, & j'ajoute en une somme ces deux produits, ce qui fait $2z + 3x = 5a$, laquelle Equation étant jointe avec la précédente, $18x + 2y = 20a$, cela fait $21x + 2z + 2y = 25a$. Ainsi pour faire l'alliage proposé, c'est-à-dire, pour faire 25 sols en 25 piéces, il faut prendre 21 carolus, deux pieces de six blancs, & 2 sols marqués valant quinze deniers.

On

On reconnoît si un Problême est possible ou non, car si l'on proposoit de faire 20 sols en 20 de ces trois piéces dont nous venons de parler, il est évident que le Problême seroit impossible, parce que l'on ne peut pas les allier comme nous venons de le voir, à moins que de prendre 21 carolus, 2 sols marqués, & 2 piéces de six blancs, ce qui fait 25 piéces.

On résout plusieurs Problêmes par le moyen de cette Regle d'Alliage, par exemple celui-ci. *Il y avoit, dit-on, dans un bateau des hommes, des femmes & des enfans; les hommes pour le passage payoient six blancs, les femmes un sol marqué, & les enfans un carolus; & l'on sçait que toutes ces piéces faisoient 15 sols en 13 pieces. Combien y avoit-il d'hommes? combien de femmes? combien d'enfans?* Il faut allier ces piéces. Je leur donne des noms, j'appelle a six blancs, b les sols marqués de quinze deniers, & c les carolus de dix deniers, & m le prix moyen, qui est un sol. J'allie a avec c, & j'ai ces Equations $a - 6 = 2m$, & $c + 2 = m$. Je multiplie la premiere Equation par 2, ce qui me donne $2a - 12 = 4m$; & la seconde par 6, ce qui fait $6c + 12 = 6m$. J'ajoute ces deux Equations ensemble, j'ai $2a + 6c = 10m$.

J'allie ensuite b avec c. J'ai cette Equation, $b - 3 = m$, & $c + 2 = m$. Je multiplie la premiere par 2, ce qui fait $2b - 6 = 2m$, & la seconde par 3, ce qui fait $3c + 6 = 3m$. J'ajoute ces deux produits en un, vient $3c + 2b = 5m$. Je joins celui-ci avec le produit du premier alliage, qui est $2a + 6c = 10m$, cela fait $2a + 2b + 9c = 15m$, ce qui me fait connoître qu'il y avoit deux hommes, deux femmes, neuf enfans.

Il eſt facile de ſe tromper en ces ſortes de Problêmes, ſur-tout lorſqu'il y a pluſieurs grandeurs, parce que l'alliage ſe peut faire en différentes manieres, comme en cet exemple. *Une troupe de cent perſonnes compoſée d'hommes, de femmes, d'enfans & de ſerviteurs, ont dépenſé dans un voyage* 100 *piſtoles. Les hommes ont dépenſé chacun trois piſtoles, les femmes chacune une, chaque enfant une demie piſtole, & chaque ſerviteur une ſeptiéme.* h eſt l'argent des hommes, $ſ$ celui des femmes, e celui des enfans, & $ſ$ celui des ſerviteurs. S'il étoit queſtion de ſçavoir, le nombre des hommes, des femmes, des enfans & des ſerviteurs, ſéparément, l'on ne pourroit pas conclure qu'il y eût néceſſairement 28 hommes, 5 femmes, 4 enfans, 63 ſerviteurs de ce que $28h + 5ſ + 4e + 63ſ = 100$ piſtoles; car on peut allier ces quatre grandeurs en pluſieurs différentes manieres, de ſorte qu'elles faſſent toujours 100 piſtoles, comme vous le voyez dans cet exemple, $25h + 15ſ + 4e + 56ſ = 100$. Cent piéces de différentes valeurs font encore ici cent piſtoles. Bachet dans ſes Commentaires ſur Diophante, Livre IV. Queſtion 4^e^. propoſe en nombres entiers quatre-vingt-une réſolutions différentes de cette queſtion.

Chapitre VI.

Réſolution de pluſieurs Problêmes.

28. POur faire voir avec plus d'étendue l'uſage de la méthode qu'on enſeigne ici, je propoſerai dans ce Chapitre pluſieurs Problêmes. Je les

énonce d'une maniere abstraite pour abréger, & en même temps pour en rendre les resolutions plus générales. J'aurois pu, par exemple, proposer le premier Problême qui suit, d'une maniere moins abstraite, en le proposant ainsi. *Deux hommes ont ensemble cent écus, l'un a 40 écus plus que l'autre : quel est l'argent d'un chacun ?* On pourroit de la même maniere au lieu de l'énoncé de chacun des autres Problêmes former des Questions de cette nature, faire des énigmes telles que Bachet en propose 45 qu'il a trouvées dans l'Anthologie Grecque. En voici une. *Une ânesse dit à une mule : Si je t'avois donné un de mes sacs, nous en aurions autant l'un que l'autre ; & si tu m'en avois donné un des tiens, j'en aurois le double de toi. Combien l'ânesse avoit-elle de sacs ?* Ces questions seroient divertissantes, mais cela m'obligeroit à de longs discours. Je pourrois aussi faire voir que la résolution de chaque Problême donne lieu de faire un Théorême, comme vous allez voir dans le Problême suivant, qu'on le peut faire.

Probleme Premier.

Diviser ce nombre 100 *en deux parties, telles que leur différence soit* 40.

La plus grande partie de 100 soit nommé z, & la plus petite x. Leur différence doit être 40. J'ai donc cette double expression ou équation $x+40 = z$, ou $z-40=x$. Ainsi je puis substituer $x+40$ en la place de z, & $z-40$ en la place de x.

Pour trouver une seconde Equation par le moyen de laquelle une des grandeurs inconnues se trouve seule, comparée avec des grandeurs

connues ; je considere que selon que la question est proposée $x+z=100$, ou $x+x+40=100$, ou $z+z-40=100$. L'une ou l'autre que je prenne de ces deux dernieres Equations, je puis résoudre ce Problême facilement ; car dans $x+x+40=100$, ôtant 40 de part & d'autre, j'aurai $x+x=60$; & prenant la moitié de ce reste, je trouverai que $x=30$; ainsi je connois la valeur de x. Dans $z+z-40=100$. si j'ajoute 40 de part & d'autre, j'aurai $z+z=140$, dont prenant la moitié, j'aurai $z=70$; ainsi la valeur de z me sera connue.

Or vous voyez que puisque $x+x+40=100$, donc il est vrai que *deux fois la plus petite partie d'une grandeur plus sa différence avec l'autre partie de cette grandeur est égale à toute la grandeur.* Et puisque $2z-40=100$, donc *deux fois la plus grande partie moins sa différence avec la plus petite partie est égale à toute la grandeur.* Voilà donc un Théorême. La résolution de tous les Problêmes que vous verrez vous donnera de la même maniere la connoissance d'un Théorême. Il suffit de l'avoir montré en cet exemple. C'est ainsi qu'on a trouvé la plûpart des Théorêmes de la Géométrie.

Probleme Second.

Couper ce nombre 100 *en deux parties, telles que la plus grande soit égale à trois fois la plus petite plus vingt unités.*

Soit nommée z la plus grande, & x la plus petite. Selon que la question est proposée $3x+20=z$. Au lieu de z je puis donc substituer $3x+20$ par-tout où il faudra mettre z ; & puisque z & x sont les deux parties de 100, & qu'ainsi

$z + z = 100$, il faut que $3x + 20 + x$, ou $4x +$ 20 soit égal à 100. Ainsi $4x + 20 = 100$. Donc en retranchant 20 de part & d'autre, $4x = 80$. Si on divise par 4 l'un & l'autre membre, on a cette Equation $x = 20$. Ainsi 20 est la valeur de x; & par conséquent puisque $3x + 20 = z$, donc la valeur de z est 80.

PROBLEME TROISIEME.

Partager 60 en deux nombres tels que $\frac{1}{5}$ du premier plus $\frac{1}{3}$ du second fassent 14.

Je nomme x la cinquiéme partie du premier nombre que je cherche, & z le second; ainsi le premier est $5x$. Et puisque x avec un tiers de z est égal à 14, comme on le suppose, $14 - x = \frac{1}{3}z$. Je multiplie cette équation par 3, & j'ai $42 - 3x = z$. Or $5x + z = 60$. Donc mettant $42 - 3x$ en la place de z, j'aurai $5x + 42 - 3x$, ou $42 + 2x = 60$. J'ôte 42 de part & d'autre, donc $2x = 18$, donc $x = 9$ & $5x = 45$; donc le premier nombre est 45, & partant le second est 15.

PROBLEME QUATRIEME.

On cherche deux nombres dont on sçait que le plus petit est le tiers du plus grand, & que si on ôte le plus petit de 16, & le plus grand de 30, les restes seront égaux.

Le plus petit soit x, l'autre soit z. Par la premiere supposition $3x = z$; & par la seconde $16 - x = 30 - z$. Substituant $3x$ égal à z en la

place de z, alors on aura cette Equation $16 - x = 30 - 3x$. J'ajoute de part & d'autre un x, & j'ai $16 = 30 - 2x$. J'ajoute ensuite de part & d'autre $2x$, & j'ai $16 + 2x = 30$. Je retranche 16 de part & d'autre, & j'ai $2x = 14$. Je divise l'un & l'autre membre par 2, & j'ai $x = 7$; ainsi x vaut 7, & par conséquent z qui est égal à $3x$ vaut 21.

PROBLEME CINQUIEME.

On cherche deux nombres qui soient entr'eux comme 1 est à 5, mais qui deviennent comme 1 est à 3, après avoir ajouté 4 au plus petit, & 6 au plus grand.

Le plus petit soit x, le plus grand z. Puisque x est la cinquiéme partie de z, donc $5x = z$; & puisqu'ayant ajouté 4 à x, & 6 à z, pour lors $x + 4$ est le tiers de $z + 6$, ou de $5x + 6$; car $5x$ est égal à z: donc multipliant $x + 4$ par 3, on aura cette Equation $3x + 12 = 5x + 6$. Retranchant de part & d'autre $3x$ & 6, il ne reste plus que $6 = 2x$; divisant ces deux nombres par 2, on a $3 = x$; donc x vaut 3, & par conséquent z vaut 15, puisqu'il vaut cinq fois x.

PROBLEME SIXIEME.

Cette grandeur inconnue $x - 30$ *est le triple de* $x - 100$. *on cherche la valeur de la grandeur* x.

Puisque $x - 30$ est le triple de $x - 100$, donc $x - 30 = 3x - 300$. J'ajoute 30 de part & d'autre, & pour lors j'ai $x = 3x - 270$. J'ajoute de rechef 270, & j'ai $x + 270 = 3x$, j'ôte un x de part & d'autre, il reste $270 = 2x$. Je divise cette

Equation par 2, ce qui me donne $135 = x$, donc x vaut 135.

PROBLEME SEPTIEME.

Il faut diviser 100 en deux parties, de telle sorte que le $\frac{1}{3}$ de la premiere avec le $\frac{1}{5}$ de la seconde fasse 30.

La premiere partie soit x, la seconde z; donc $100 - x = z$, & $100 - z = x$. Par la supposition qu'on fait que $\frac{1}{3}$ de la premiere partie x avec $\frac{1}{5}$ de z seconde partie égale à $100 - x$, est égal à 30; l'on a cette Equation $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}100 - \frac{1}{5}x = 30$. Il faut corriger cette Equation & la réduire à de plus simples termes. Pour cela j'en multiplie les membres par ce nombre 15, qui peut être divisé exactement par 3 & par 5. Je multiplie premierement le second membre 30 par ce nombre 15, ce qui fait 450; ensuite je multiplie l'autre membre, commençant par $\frac{1}{3}x$, qui étant multiplié par 15, le produit est 15 tiers qui sont cinq entiers; ainsi le produit de cette multiplication est $5x$. Ensuite je multiplie $\frac{1}{5}100 - \frac{1}{5}x$ par 15; ce qui, selon les regles, donne $300 - 3x$; ainsi j'ai cette Equation $5x + 300 - 3x = 450$. Je corrige cette Equation, ôtant du premier membre $3x$, qui se trouve avec des signes contraires, & j'ai $2x + 300 = 450$. Je retranche de part & d'autre 300, après quoi $2x = 150$. Je divise cette

équation par 2, ce qui me donne $x = 75$, par conséquent x vaut 75. Or $100 - x$, ou $100 - 75$ ou $25 = z$; donc la valeur de z est 25.

Probleme Huitieme.

Trouver un nombre, lequel ajouté à 100 & à 20, fasse deux nombres qui soient l'un à l'autre, comme 3 est à 1.

Le nombre qu'on cherche soit nommé x; je suppose la chose faite, sçavoir que $20 + x . 100 + x :: 1 . 3$. Le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, partant $60 + 3x = 100 + x$. Je retranche 60 & une fois x de part & d'autre, & j'ai $2x = 40$. Je divise cette Equation par 2; j'ai $x = 20$, par conséquent x vaut 20, qui ajouté à 100 fait 120 triple de $20 + 20$ ou de 40.

Probleme Neuvieme.

Connoissant la différence de deux grandeurs, & le rapport de l'une à l'autre, trouver chaque grandeur.

Je nomme x la plus petite. Sa différence à la plus grande est b. Donc cette plus grande est $x + b$. On suppose que $x . x + b :: 1 . 3$. donc $3x = x + b$. J'ôte x de part & d'autre; donc $2x = b$; donc $x = \frac{1}{2} b$. Si $x . x + b :: 2 . 3$. alors $3x = 2x + 2b$. J'ôte $2x$ de part & d'autre, & j'ai $x = 2b$. Ainsi la valeur de x est connue. L'expression de ce Problême est générale: par conséquent, quelque raison & quelque différence qu'on puisse supposer être entre des grandeurs données, on trouvera la valeur de ces grandeurs, comme on vient de trouver la valeur de x.

PROBLEME DIXIEME.

Connoissant la somme de deux grandeurs, & le produit de l'une par l'autre, trouver chaque grandeur.

Je nomme la somme de ces deux grandeurs $2a$, & leur différence $2z$. Ainsi, comme on l'a fait voir, s̃. n. 23. la plus petite sera $a-z$, & la plus grande $a+z$, leur produit connu soit nommé b; donc selon que la question est proposée, multipliant $a-z$ par $a+z$, leur produit $aa+az-az-zz$ sera égal à b. Puisque $+az-az$ ne font rien, on a cette Equation $aa-zz=b$. Ajoutant zz de part & d'autre, on a $aa=b+zz$. Otant b, reste $aa-b=zz$. Donc ôtant b du quarré aa, la Racine quarrée du reste sera la valeur de z.

L'expression de ce Problême est encore fort générale. Exprimant de la maniere que nous venons de le faire deux grandeurs dont on connoît la somme ou leur différence, on résout une infinité de questions.

PROBLEME ONZIEME.

L'on demande que l'on divise ce nombre 100 *en deux parties, telles que la plus grande* z *étant multipliée par la plus petite* x, *le produit qui est* xz *soit à* xx *quarré de la plus petite, comme* 10 *est à* 3.

On suppose que la plus petite est x, & la plus grande est z. Puisque z & x sont les parties de 100, donc $100-z=x$, & $100-x=z$. Or selon que la question est proposée, x ayant été multiplié par z, ou par la grandeur qui lui est égale,

sçavoir $100 - x$, le produit $100x - xx$, doit être à xx, comme 10 à 11.

$$100x - xx . xx :: 10 . 1.$$

Par conséquent puisque le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, $100x - xx = 10xx$, j'ajoute xx de part & d'autre, & j'ai $100x = 11xx$. Je divise les membres de cette Equation par x, & j'ai $100 = 11x$. Je divise de nouveau les membres de cette Equation par 11, le quotient de cette division est $9\frac{1}{11}$ d'une part, & x de l'autre; donc $9\frac{1}{11} = x$; donc x vaut $9\frac{1}{11}$, & partant z, qui est l'autre partie de 100, vaut $50\frac{10}{11}$.

Probleme Douzieme.

J'ai dépensé un certain nombre de livres, dont je ne me souviens plus; je sçai seulement que le $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ de ce nombre $+ 22 = 94$. Trouver ce nombre de livres.

Tous ces nombres rompus, ajoutés dans une somme, font $\frac{26}{24}$; donc $\frac{26}{24} + 22 = 94$. J'ôte 22 de part & d'autre, ce qui me donne $\frac{26}{24} = 72$. Puisque 72 est ainsi égal à $\frac{26}{24}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ du nombre que je cherche & que je nomme x; je sçai donc que 72 doit être à x,

comme 26 est à 24, qui représente l'entier x. Par conséquent $26. 24 :: 72. x$; multipliant donc 72 par 24, & divisant le produit de cette multiplication par 26, le quotient de cette division, qui est $66 \frac{6}{13}$, donnera la valeur de x qu'il falloit trouver.

PROBLEME TREIZIEME.

Ce nombre 576 est un nombre plan, on cherche ses racines inconnues x & z, *qui sont entr'elles comme* 1 & 4.

Selon que ce Problème est proposé, on sçait que $x. z :: 1. 4.$ & que $xz = 576$. Or puisque le produit des extrêmes x & 4 est égal à celui des moyens qui sont ici z & 1 ; donc $4x = z$. Ainsi au lieu de xz, on peut mettre $4xx$: & puisque xz est égal à 576, donc $4xx = 576$. Je divise cette Equation par 4, j'ai $xx = 144$; je prends la racine quarrée des deux membres, ce qui me donne $x = 12$; donc x vaut 12, & par conséquent z vaut 48.

PROBLEME QUATORZIEME.

On veut partager le nombre 178 en trois parties, qu'on nomme x, y, z, *telles que* $\frac{x}{5} = 8z$, & *que* $8z = \frac{y}{6}$.

Pour résoudre ce Problême, il n'est question que de trouver la proportion qui est entre ces trois parties, ce que l'on connoîtra par le moyen

des deux Equations ; car puisque $\frac{x}{5} = 8z$, donc en multipliant l'un & l'autre membre par 5, l'on aura $x = 40z$; ainsi on sçait déja que puisque x est égal à quarante fois z, il faut que $z. x :: 1. 40$. En second lieu ; puisque $\frac{y}{6} = 8z$; en multipliant cette Equation par 6, on a $y = 48z$; donc on sçait que y est égal à 48 fois z, & qu'ainsi $z. y :: 1. 48$. Cela fait connoître les raisons des trois Grandeurs $z. x. y.$ sçavoir que $z. x. y :: 1. 40. 48$. Pour achever ce Problême, il faut, par le Liv. III. n. 82. diviser 178, proportionnellement à ces trois nombres 1. 40. 48. qui, ajoutés ensemble, font 89.

Probleme Quinzieme.

Ce nombre 30 *étant donné, trouver ses trois parties* x. y. z. *On sçait que* $\div$ x. y. z. & *que* xy. xz. :: 1. 4.

Pour résoudre ce Problême, il n'est question que de trouver la raison qu'ont entr'elles ces parties $x. y. z.$ du nombre 30, qu'on suppose en progression. On suppose encore $xy. xz :: 1. 4$. Donc puisque l'on a démontré, Livre III. n. 63. que xy est à xz, comme y à z ; il faut que z soit quatre fois plus grand que y. Et puisque x est le premier terme de la progression, si on dit que z soit 16, & par conséquent que y soit 4, x doit être 1. il ne s'agit donc plus que de diviser 30 proportionnellement à ces trois nombres 1. 4. 16. dont la somme est 21. On trouvera, Liv. III. n. 82. ces trois nombres $1\frac{9}{21}$. $5\frac{15}{21}$ $22\frac{18}{21}$, qui seront les trois parties de 30, que l'on cherchoit

PROBLEME SEIZIEME.

On cherche deux nombres x *&* z. *On sçait qu'ôtant* 1 *de* z, *& l'ajoutant à* x, *alors* x *est double de* z; *& qu'ôtant* 1 *de* x, *& l'ajoutant à* z, *alors* x *&* z *sont égaux.*

Selon la premiere supposition $2z-2=x+1$, & selon la seconde $z+1=x-1$. Il faut réduire les deux inconnues z & x à une seule, z à x, ou x à z. Si on veut faire évanouir x, il faut ajouter aux deux membres de l'équation $z+1=x-1$ la même grandeur 1, après quoi on aura $z+2=x$. Mettant donc $z+2$ pour x dans l'équation $2z-2=x+1$, pour lors $2z-2=z+3$. Ajoutez 2 de part & d'autre, vous aurez $2z=z+5$. Retranchez un z de part & d'autre, & vous aurez $z=5$. Et puisque $z+2=x$, donc $x=7$.

Remarquez que ce Probléme exprimé d'une maniere abstraite, est le Probléme de la mule & de l'ânesse dont nous avons parlé ci-dessus; x marque le nombre des sacs de l'ânesse, & z celui des sacs de la mule. Ainsi l'ânesse avoit sept sacs, & la mule cinq. Si on enseignoit ce petit ouvrage à de jeunes gens, il faudroit appliquer ces Problêmes à de semblables questions pour les divertir; & les convaincre en même temps de l'utilité de l'Analyse.

PROBLEME DIX-SEPTIEME.

x. z :: 1. 3. & zz. x :: 6. 1. *l'on cherche la valeur de* x *& de* z.

De la maniere que cette question est proposée, il faut que x soit le tiers de z: donc $z=3x$; & puis-

que zz. x :: 6. 1. mettant $3x$ en la place de z, ou $9xx$ quarré de $3x$ en la place de zz quarré de z, j'exprimerai ainsi la proportion précédente ; $9xx$. x :: 6. 1. où z ne paroît plus. Le produit des extrêmes est égal à celui des moyens ; donc $9xx = 6x$. Je divise les membres de cette équation par 9 ; & j'ai $xx = \frac{6x}{9}$, ou $\frac{2x}{3}$. Je les divise encore par x ; & j'ai $x = \frac{2}{3}$. Ainsi x vaut $\frac{2}{3}$, & par conséquent z vaut 2, dont le quarré, qui est 4, est six fois plus grand que $\frac{2}{3}$.

Probleme Dix-huitieme.

Connoissant le premier & le second terme d'une progression Géométrique, avec la somme de tous les termes, connoître combien elle a de termes, & la valeur du dernier.

Soit cette progression $\div$ 2. 6 . . . . . . x. Le premier terme & le second sont des nombres connus, les autres sont inconnus ; ainsi j'ai marqué leurs places avec des points. On sçait que 728 est la somme de tous les termes. Je nomme x le dernier terme. 728 contient x, & outre cela la somme de tous les termes qui précédent x, qui est ainsi $728 - x$. Or, Liv. III. n. 90. $6 - 2$. 2 :: $x - 2$. $728 - x$. Donc $2x - 4$, produit des moyens, est égal à $2912 - 4x$ produit des extrêmes. Ainsi $2x - 4 = 2912 - 4x$. J'ajoute $4x$ de part & d'autre, ce qui fait $6x - 4 = 2912$. J'ajoute encore de part & d'autre 4, ce qui fait $6x = 2916$ que je divise par 6, & j'ai $x = 486$. Le dernier terme est donc 486. On connoîtra le nombre des termes de

la progression proposée, par ce qui a été enseigné, Liv. III. n. 98.

Ce Probleme est celui dont on avoit promis la résolution, Liv. III. n. 101.

PROBLEME DIX-NEUVIEME.

Connoissant la différence qui est entre deux Grandeurs inconnues, & un moyen proportionnel entre ces Grandeurs, connoître ces Grandeurs.

Les Grandeurs données sont y & z, leur différence est 8. Le moyen proportionnel qui est entr'elles est d. Il faut premierement exprimer ces deux Grandeurs, de maniere qu'elles se réduisent à une expression où il n'y ait qu'une lettre inconnue. Supposant que $2x = z + y$, & prenant 4 moitié de la différence de z à y, selon ce que nous avons enseigné ci-dessus, n. 23. $x + 4$ doit être égal à y, si z est plus grand que y; & $x - 4$ égal à y, si y est plus petit que z. Par conséquent, selon que la question est proposée, $\div x - 4.\ d.\ x + 4$. Le produit des extrémes, qui est $xx - 16$. est égal à dd quarré de d moyen proportionnel, Donc $xx - 16 = dd$. Transportez 16 pour avoir $xx = dd + 16$. La grandeur d est connue: si elle étoit 3, donc dd seroit 9; ainsi $xx = 25$, laquelle Equation on réduit par l'extraction de la racine quarrée à celle-ci $x = 5$. Or $z = x + 4$; donc $z = 9$, & par conséquent $y = 1$.

PROBLEME VINGTIEME.

Trois personnes ont chacune un nombre d'écus, la premiere & la seconde ont a *plus que la troisiéme; la premiere & la troisiéme ont* b *plus que*

la seconde ; & la seconde & la troisieme ont c *plus que la premiere. On demande ce que chacun doit avoir.*

Soit x le nombre des écus de la premiere, y celui de la seconde, & z celui de la troisiéme. Selon que la question est proposée, 1°. $x+y-a=z$; donc $x=z-y+a$.

2°. $x+z-b=y$; donc $x=y-z+b$.

3°. $x=y+z-c$.

Remarquez que tous les seconds membres de ces trois Equations, $x=z-y+a$. $x=y-z+b$. $x=y+z-c$, sont égaux entr'eux, étant égaux à x. Donc $z-y+a=y+z-c$; & $x+z-c=y-z+b$.

Je considere cette Equation $z-y+a=y+z-c$. J'ôte z de part & d'autre, reste $-y+a=y-c$. J'ajoute y, & j'ai $a=2y-c$. J'ajoute encore c, & j'ai $a+c=2y$; donc y vaut la moitié de $a+c$.

De même je réduis cette Equation $y-z+b=y+z-c$ à celle-ci $b+c=2z$ en ôtant de part & d'autre y, il vient $-z+b=z-c$. J'ajoute de part & d'autre z, & j'ai $b=2z-c$. J'ajoute encore c, & vient $b+c-2z$. Donc z est égal à la moitié de $b+c$. Or $x=y+z-c$; donc la valeur de x ne peut plus être inconnue. Sa valeur sera la moitié de $a+c+b+c$ valeur de $y+z$, retranchant de cette somme la valeur de c.

Probleme Vingt-unieme.

On sçait que x. z. y. :: 9. 12. 16. *Outre cela que* $xx+zz+yy=4329$. *Il faut trouver la valeur de ces trois grandeurs*, x. z. y.

Puisque x. z. y :: 9. 12. 16. Donc xx. zz,

yy :: 81. 144. 256. Ces trois nombres ſont les quarrés de 9. 12. & 16. leur ſomme eſt 481. Par l'hypotheſe, celle des quarrés xx, zz, & yy, eſt 4329. Diviſant donc cette ſomme 4329, ſelon qu'il a été enſeigné, Liv. III. n. 82. proportionnellement aux parties de 481, on aura la valeur de chacun de ces trois quarrés inconnus ; ſçavoir $xx = 729$, $zz = 1296$, $yy = 2304$, dont ayant extrait les racines, on a $x = 27$, $z = 36$, $y = 48$.

Probleme Vingt-deuxieme.

2a, eſt la ſomme de deux grandeurs, dont le produit ajouté à la ſomme de leurs quarrés eſt c, *trouver chaque grandeur.*

Je nomme $2y$ leur différence qui eſt inconnue, tellement que la plus petite ſera $a - y$, & la plus grande $a + y$; leur produit eſt $aa - yy$. La ſomme de leurs quarrés eſt $2aa + 2yy$, laquelle avec ce produit fait $3aa + 3yy = c$. Ainſi on a cette Equation $3aa + yy = c$; donc $yy = c - 3aa$. Or $c - 3aa$ eſt tout connu ; donc yy le ſera pareillement ; & par conſéquent ſa racine y, au moyen de laquelle on connoîtra les deux grandeurs $a - y$ & $a + y$.

Probleme Vingt-troisieme.

Connoiſſant la ſomme de deux grandeurs & la ſomme de leurs quarrés, trouver chaque grandeur.

Soit $2a$ la ſomme des grandeurs qu'on veut connoitre, & c la ſomme de leurs quarrés. Je nomme $2z$ la différence des deux grandeurs : ainſi la plus petite eſt $a - z$, & la plus grande $a + z$. Le quarré de $a - z$ eſt $aa - 2az + zz$, & celui de

$a+z$ est $aa+2az+zz$. Ces deux quarrés ajoutés ensemble sont $2aa+2zz$. Or c est égal à ces deux quarrés ; donc $2aa+2zz=c$; donc $2zz=c-2aa$. & $zz=\frac{1}{2}c-aa$. Pour connoître z, il faut retrancher aa de la moitié de c, & du reste en prendre la racine quarrée, qui sera la valeur de z.

PROBLEME VINGT-QUATRIEME.

Connoissant la somme de deux grandeurs, & b *la différence de leurs quarrés, trouver chaque grandeur.*

Soit $2a$ la somme de ces grandeurs, leur différence qui est inconnue soit $2z$. La plus petite est $a-z$. La plus grande $a+z$. Le quarré de $a-z$ est $aa-2az+zz$: celui de $a+z$ est $aa+2az+zz$. La différence de ces deux quarrés est $4az$, qui est égale à b. Donc $4az=b$. Je divise cette Equation par $4a$, après quoi $z=\frac{b}{4a}$; ainsi le quotient de b divisé par $4a$ est la valeur de z.

PROBLEME VINGT-CINQUIEME.

Connoissant la somme de deux grandeurs, & la somme de leurs cubes, ou la différence de leurs cubes, trouver chaque grandeur.

Ce Problême se résout comme les deux précédens.

PROBLEME VINGT-SIXIEME.

Connoissant le produit de deux grandeurs 32,

& la somme de leurs quarrés 80, *trouver quelles sont ces grandeurs.*

Je nomme $2x$ leur somme, & $2z$ leur différence. Ainsi, selon ce qu'on a dit, S. n. 23. dont vous voyez que nous faisons tant d'usage, $x-z$ sera la plus petite de ces deux grandeurs inconnues, & $x+z$ la plus grande. Le produit de ces deux grandeurs est $xx-xz+xz-zz$, égal, comme on le suppose, à 32. Ainsi corrigeant l'expression de ce produit, on a cette Equation $xx-zz=32$, ou $xx=32+zz$.

Le quarré de la plus petite de ces deux grandeurs est $xx-2xz+zz$: celui de la plus grande est $xx+2xz+zz$. La somme de ces quarrés est $2xx+2zz$, égal à 80, selon que la question est proposée. On a donc cette Equation $2xx+2zz=80$, ou $2xx=80-2zz$. Divisant cette Equation par 2, vient $xx=\frac{80-2zz}{2}$. On a trouvé que $xx=32+zz$. Donc substituant $32+zz$ au lieu de xx, on aura cette Equation $32+zz=\frac{80-2zz}{2}$, que je multiplie par 2, & j'ai $64+2zz=80-2zz$. J'ajoute $2zz$, & j'ai $64+4zz=80$. Je retranche 64, & j'ai $4zz=80-64$, c'est-à-dire, $4zz=16$, que je divise par 4, & j'ai $zz=4$: Partant z moitié de la différence de ces deux grandeurs qu'on cherche, est 2 ; la différence entiere est donc 4. Puisque $xx-zz$ leur produit est égal à 32, & que $xx=32+zz$, c'est-à-dire que $xx=36$, donc x vaut 6. La plus petite des grandeurs qu'on cherche est $x-z$, & la plus grande $x+z$, c'est-à-dire $6-2$, & $6+2$. Donc ces grandeurs sont 4 & 8.

Probleme Vingt-septieme.

2y est la somme de deux grandeurs inconnues, leur différence est 2z, *leur produit connu* b, *&* c *la valeur de ce produit ajouté à la somme de leurs quarrés ; il faut connoître ces grandeurs.*

La plus petite est $y - z$: la plus grande $y + z$. Leur produit est $yy - zz$. Leurs quarrés sont $yy - 2yz + zz$ & $yy + 2yz + zz$. Ces deux quarrés joints avec le produit $yy - zz$ font $3yy + zz$. Or $yy - zz = b$, donc $yy = b + zz$; partant $yy - b = zz$. Par l'hypothese encore $3yy + zz = c$, donc $zz = c - 3yy$. Donc $yy - b = c - 3yy$. Et ajoutant $3yy$, on a $4yy - b = c$, & par conséquent $4yy = c + b$ & $yy = \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}b$, &c.

Probleme Vingt-huitieme.

Le solide c *est fait du produit de* 2y *somme de deux grandeurs par la somme des quarrés de ces grandeurs ; & le solide* d *est fait par* 2z *différence de ces grandeurs, multiplié par la différence des quarrés de ces grandeurs. Connoître chaque grandeur.*

La plus petite de ces deux grandeurs est $y - z$, & la plus grande $y + z$. La somme de leurs quarrés est $2yy + 2zz$. dont le produit par $2y$ est $4y^3 + 4yzz$ égal à c. La différence des quarrés de $y - z$ & $y + z$ est $4yz$, qui multipliée par $2z$ fait $8yzz = d$. Donc $4y^3 + 4yzz = c$, & $8yzz = d$. Or la premiere Equation se réduit

à celle-ci $yzz = \frac{1}{4}c - y^3$, & la seconde à celle-ci $yzz = \frac{1}{8}d$. Donc $\frac{1}{4}c - y^3 = \frac{1}{8}d$. Donc $\frac{1}{4}c = \frac{1}{8}d + y^3$, & $\frac{1}{4}c - \frac{1}{8}d = y^3$, &c.

PROBLEME VINGT-NEUVIEME.

On cherche la valeur de x *&* *de* y, *dont la différence est* z. *On sçait seulement que le produit de* x *&* y *divisé par leur différence* z *est* $5\frac{1}{4}$.

Selon que la question est proposée, yx produit de x multiplié par y étant divisé par z, le quotient de cette division est égal à $5\frac{1}{4}$. Ainsi on a cette Equation $\frac{yx}{z} = 5\frac{1}{4}$. Mais elle ne suffit pas, il en faut avoir une autre qu'on ne peut point trouver, parce que cette question n'est point déterminée ; c'est-à-dire, que les grandeurs qu'on cherche n'ont point de rapport particulier qui les détermine, de telle sorte qu'il n'y ait qu'une seule grandeur à qui ce rapport convienne. Plusieurs grandeurs peuvent avoir ce même rapport ; ainsi on peut supposer telle grandeur qu'on voudra. Je suppose donc que la plus petite des deux grandeurs proposées est 3 ; la plus grande est donc $z + 3$. Le produit de 3 & de $z + 3$ est $3z + 9$, qui étant divisé par z, le quotient doit être $5\frac{1}{4}$. Ainsi $\frac{3z+9}{z} = 5\frac{1}{4}$. Je multiplie les membres

de cette Equation par z, & j'ai $3z + 9 = 5z + \frac{1}{4}z$. Je retranche $3z$, & vient $9 = 2z + \frac{1}{4}z$. Pour délivrer l'Equation de cette fraction, je la multiplie par 4, & j'ai $36 = 8z + z$. Par conséquent $36 = 9z$ que je divise par 9, après quoi $4 = z$. Ainsi z vaut 4, & partant comme la plus petite grandeur qu'on cherchoit est 3, la plus grande sera 7. Le produit de 3 par 7 est 21. Ce nombre étant divisé par 4, le quotient est $5.\frac{1}{4}$. Ainsi ces deux nombres satisfont à la question. En prenant tout autre nombre que 3, j'aurois résolu de la même maniere la question; c'est-à-dire, que j'aurois trouvé d'autres nombres qui y auroient satisfait.

Probleme Trentieme.

Ce nombre 34 est composé de ces deux nombres quarrés 9 & 25. Il faut partager ce nombre en deux autres nombres quarrés, de telle maniere que ce que l'on ajoute à la racine de l'un soit la moitié de ce qu'on ôte de la racine de l'autre.

La racine de 9 est 3, celle de 25 est 5. Pour résoudre ce Problême, il faut trouver deux autres racines, dont l'une soit plus petite, & l'autre plus grande. J'ajoute x à 3. L'on demande, outre cela, que ce que l'on ôte de 5 soit le double de ce que l'on ajoute à 3; ainsi si la premiere racine est $3 + x$, la seconde racine sera $5 - 2x$. Le quarré de $3 + x$ est $9 + 6x + xx$; celui de $5 - 2x$ est $25 - 20x + 4xx$. Ces deux quarrés ajoutés ensemble font $34 - 14x + 5xx$ qui sont égaux à 34; ainsi l'on a cette Equa-

tion $34 - 14x + 5xx = 34$. J'ajoute $14x$ de part & d'autre, $34 + 5xx = 34 + 14x$. Je retranche 34, j'ai $5xx = 14x$; je divise par x, & j'ai $5x = 14$. Je divise par 5, & il vient $x = \frac{14}{5}$. La premiere racine est $3 + \frac{14}{5}$. La seconde est $5 - \frac{28}{5}$ qui corrigée est $\frac{3}{5}$. Le quarré de la premiere est $33\frac{16}{25}$. Celui de la seconde $\frac{9}{25}$; & les deux font 34.

Voilà quelques exemples de Problêmes indéterminés sur des grandeurs rationnelles, c'est-à-dire qui se peuvent exprimer par nombres. Comme il est libre entre les grandeurs dont la valeur n'est point déterminée, d'en supposer une telle qu'on la veut choisir, ces Problêmes sont capables de plusieurs différentes résolutions. Prenez garde aux méthodes, qui étant bien entendues, découvrent le moyen de résoudre une infinité de Problêmes sur les nombres.

PROBLEME TRENTE-UNIEME.

Trouver des grandeurs commensurables, & telles que leur somme, & celles de leurs quarrés ayent un même rapport que deux grandeurs connues.

a & b sont les grandeurs connues. Je nomme z la premiere des inconnues, zy la seconde. Prenez garde à cette expression. Dans les Problêmes précédens on a marqué chaque inconnue par une seule lettre. Selon que la question est

proposée $z+zy$ la somme des deux inconnues est à $zz+zzyy$, la somme de leurs quarrés, comme a est à b ; ainsi le produit des extrêmes de cette proportion $z+zy$, & b est égal au produit des moyens $azz+zzyy$. Donc.

$$bz+bzy=azz+azzyy.$$

Je divise les deux membres de cette Equation par $az+azyy$, & après la correction vient

$$z=\frac{b+by}{a+ayy}.$$

Si je suppose que $y=2$. Donc $z=\frac{b+2b}{a+4a}$ & si $a=1$, & $b=10$; donc $z=6$. Ainsi $zy=12$. Or $z+zy$ ou $6+12$ est à $zz+zzyy$ ou $36+144$, comme a est à b, c'est-à-dire 18. 180 :: 1. 10. Voilà donc la question résolue. On auroit trouvé d'autres nombres, si on avoit supposé y égal à une autre valeur que ce nombre 2.

PROBLEME TRENTE-DEUXIEME.

Couper un quarré déterminé en deux quarrés parfaits.

Soit a le côté du quarré connu, & z celui du premier inconnu qu'on cherche, & x le côté du second. Ainsi voilà ce qu'on cherche $aa=zz+xx$. Il est évident que x & z sont chacun moins que a. Prenons $a-zy$ ou $by-a$ pour x. Ainsi au lieu de l'Equation précédente on aura $aa=zz+aa+zzyy-2azy$, qu'on peut réduire par les voies ordinaires à celle-ci, $2azy=zz+zzyy$. divisant de part & d'autre par z vient $2ay=z+zyy$, ou $2ay=1z+1zyy$.
Je

Je divise l'un & l'autre membre par $1+yy$, & j'ai $\frac{2ay}{1+yy}=z$. Donc supposant $y=2$ & $a=10$. Alors $2ay=40$, & $1+yy=1+4$. Ainsi $z=\frac{2ay}{1+yy}=8$, & $zy=16$, & $zy-a=6$.

Donc $x=6$ & $xx+zz$, ou $36+64=100=aa$. Il faut toujours supposer y plus grand que l'unité.

PROBLEME TRENTE-TROISIEME.

Diviser la somme de deux quarrés parfaits en deux autres parfaits.

Soit a le côté du plus grand des quarrés connus, & b celui du plus petit. Le côté d'un des deux inconnus sera moindre nécessairement que le côté a, & l'autre par conséquent plus grand que le petit côté b. Nommons donc $a-z$ celui des côtés inconnus, qui vaut moins que le côté connu a; & nommant ensuite $yz-b$ l'autre côté qui doit surpasser b, les quarrés de ces deux côtés seront $aa-2az+zz$, & $yyzz-2byz+bb$. Et leur somme égalera la somme connue $aa+bb$. Ce qui donnera une équation qui se réduit à celle ci.

$$zz+yyzz=2az+2byz.$$

Divisant cette équation par z, vient

$$z+yyz=2a+2by.$$

Or $z+yyz=1z+yyz$. Divisant donc l'équation précédente par $1+yy$, reste $z=\frac{2a+2by}{1+yy}$.

Ainsi si $a=3$. $b=2$, & qu'on suppose que

$y=2$. Donc $z=\frac{6+8}{1+4}=\frac{14}{5}$. On trouvera de cette maniere une résolution de la question, qui en peut recevoir une infinité d'autres.

Equation & égalité c'est une même chose. On se sert plus souvent du premier nom ; & on n'employe le second, que lorsqu'il s'agit de Problêmes numériques, qu'on distingue en Problêmes de double, de triple égalité, selon le nombre des égalités qu'il faut trouver pour les résoudre. On définit ainsi ces égalités. On nomme double égalité, la comparaison de deux grandeurs qui renferment une même inconnue, à deux divers quarrés qui sont inconnus. Comme s'il faut découvrir deux quarrés, dont l'un soit égal à une grandeur az, *& l'autre à une grandeur* bz, *en sorte que l'inconnue* z *de la grandeur* az *soit la même* z *qui est inconnue dans* bz. *Et s'il falloit découvrir de la même sorte deux quarrés, dont l'un fût égal à une grandeur* $az+6$, *& l'autre à une autre grandeur* $bz+d$. *Mais s'il y avoit trois diverses grandeurs, dont chacune renfermât une même inconnue, & qu'il fallût égaler chacune à un quarré, on diroit que c'est une triple égalité. Voilà un Problême de double égalité.*

PROBLEME TRENTE-QUATRIEME.

Trouver une grandeur, laquelle étant multipliée par deux grandeurs connues, donne deux produits qui soient chacun un quarré parfait.

Ayant nommé a & b les deux grandeurs connues, & z l'inconnue qui les multiplie; le premier plan az sera égal à un quarré yy. Ainsi $az=yy$, divisant par a cette équation, viendra $z=\frac{yy}{a}$

$\frac{yy}{a}$. Le second plan bz sera égal à un quarré xx. Ainsi $bz = xx$, & $z = \frac{xx}{b}$. Partant $\frac{xx}{b} = \frac{yy}{a}$; & multipliant de part & d'autre par b, on aura le quarré $xx = \frac{byy}{a}$, dont prenant la racine on aura $x = \frac{y\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. De sorte que, pour trouver une résolution où les grandeurs soient toutes commensurables, il est nécessaire que les grandeurs connues a & b soient telles que la grandeur $\sqrt{\frac{b}{a}}$ soit un quarré parfait, ou que les grandeurs a & b soient deux plans semblables. Soit $a = 6$, $b = 54$. Ainsi $\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{9}$. Comme y est arbitraire, supposé que $y = 8$, alors $x = 24$, & $z = \frac{32}{3}$, & az ou $6z = 64$; & bz ou $54z = 576$.

Ainsi l'on a trouvé ce que l'on cherchoit, c'est-à-dire z une grandeur qui multipliée par a & par b donne deux produits, qui sont deux quarrés parfaits. Vous pouvez voir que cette liberté qu'on a de choisir ou de supposer des grandeurs telles qu'on le veut, est ce qui rend souvent la résolution des Problêmes indéterminés très difficile, quand il s'agit de trouver des nombres, ou quarrés, ou cubes. Cela demande un grand tems qui n'est pas entierement perdu, parce que cela peut exercer l'esprit, & qu'on y trouve un amusement agréable, quand on aime les questions numériques. Mais comme je ne dois pas grossir ces Elémens, je ne proposerai pas d'autres semblables Problêmes. J'ai

tiré ces quatre derniers des Elemens du Pere Prestet de l'Oratoire, qui en propose un grand nombre. La résolution de ceux-ci donnera une entrée dans ce que cet Auteur a écrit touchant la résolution des Problêmes indéterminés..

CHAPITRE VII.

De la nature des Equations, de leurs différens dégrés, & des préparations nécessaires pour les résoudre.

DAns les Problêmes qu'on vient de proposer on a réduit toutes les grandeurs inconnues à une seule, qu'on fait passer dans un des membres de l'équation, la délivrant de toute autre grandeur, de maniere que se trouvant égale à une ou plusieurs grandeurs connues, elle n'est plus inconnue. Il y a des Problêmes plus composés, dans lesquels, après toutes les réductions qui ont été expliquées, c'est le quarré ou le cube, ou le quarré de quarré de la lettre qui marque l'inconnue, par exemple, ou z^2, ou z^3, ou z^4, qui est dans l'un des membres de l'équation, & dans l'autre se trouve la grandeur inconnue z mêlée avec d'autres grandeurs; de sorte que le Problême n'est pas résolu, puisqu'on ne connoît pas la valeur précise de z. Quand cela arrive, l'Equation n'est pas simple comme celles que nous avons vûes jusqu'à présent, elle est composée. C'est de la nature de ces Equations composées, que nous allons parler dans ce Chapitre, seulement pour en donner une idée; car pour en donner une pleine connoissance, il faudroit un Ouvrage fait exprès, & ce ne sont ici que des Elémens pour ceux qui commencent,

I.

Les Equations sont dites d'un ou de plusieurs degrés, selon le degré où la grandeur inconnue est élevée.

Considérez ces équations, où l'inconnue est z, élevée à différens degrés.

$$z = b$$
$$z^2 = -az + bb$$
$$z^3 = +az^2 + bbz - c^3$$
$$z^4 = az^3 - c^3z + d^4$$

Dans la premiere de ces équations, la grandeur inconnue z est égale à b : Dans la seconde, le quarré de z est égal au quarré de b moins a, multiplié par z. Dans la troisiéme, le cube de z est égal à a, multiplié par le quarré de z, plus le quarré de b multiplié par z, moins le cube de c. Enfin dans la quatrieme, le quarré de quarré de z est égal à a multiplié par le cube de z, moins le cube de c multiplié par z, plus le quarré de quarré de d &c. Ces équations sont composées, & à la réserve de la premiere, les autres ne font pas découvrir la juste valeur de l'inconnue. Or ces équations reçoivent différens noms selon la puissance à laquelle la grandeur inconnue est élevée. Une équation est du premier degré, si l'inconnue est une grandeur linéaire, ou si elle est dans le premier degré, comme est la premiere de ces équations $z = b$. Elle est du second degré, si cette inconnue est un quarré ; du troisiéme, si c'est un cube ; du quatriéme; si l'inconnue est élevée à la quatriéme puissance. Ainsi de toutes les autres équations qui prennent leur nom des degrés de l'inconnue.

On reconnoitra dans la ſuite, que pour mieux expliquer la nature des équations, & pour les réſoudre, il eſt bon de faire paſſer dans le premier membre tout ce qui eſt dans le ſecond, égalant toute l'équation à zéro ; ce qui ſe fait en changeant les ſignes, c'eſt-à-dire, en joignant les deux membres par le ſigne $+$ ou $-$, ſelon que l'inconnue eſt une grandeur poſitive ou négative ; mettant zéro dans le ſecond membre après le ſigne de l'égalité, il eſt évident que ſi $z=b$, ôtant b de z, il ne doit rien reſter, c'eſt-à-dire, qu'en retranchant d'une grandeur ſa valeur entiere, on l'égale à zéro. Si $z=b$ donc $z-b=0$.

Lorſqu'une grandeur eſt négative, elle eſt moins que rien. Ainſi ſi z eſt négatif, & qu'il s'en faille b qu'il ne ſoit égal à rien, que $z=0$ $-b$, alors pour faire paſſer b dans le premier membre, il faut le joindre avec $+$; car dans ce cas, afin que z ſoit égal à zéro, il eſt évident qu'il faut lui ajouter b, par conſéquent $z+b=0$. Voilà donc la regle générale, ſi la grandeur inconnue, qui eſt ſeule dans le premier membre, eſt poſitive, le premier membre moins le ſecond eſt égal à zéro. Si cette inconnue eſt négative, le premier membre plus le ſecond eſt égal à zéro. Au reſte quand on fait paſſer le ſecond membre dans le premier, on change les ſignes, c'eſt-à-dire le $+$ en $-$, & le $-$ en $+$. Ainſi ſi $z^2=$ $-pz+q$, on écrit $z^2+pz-q=0$. Si $z^2=+$ $pz-q$, on écrit $z^2-pz+q=0$.

II.

Des différens termes d'une Equation. Qu'eſt-ce qu'on appelle Terme d'une Equation ? Tous ces termes ne paroiſſent pas toujours.

Après qu'on a fait paſſer d'un côté toutes les grandeurs d'une équation, qu'ainſi le ſecond membre eſt égal à zéro, on voit que dans le premier lieu du premier membre la grandeur inconnue y eſt dans le dégré qui donne le nom à l'équation ; que c'eſt ou une quatriéme, ou une troiſiéme, ou une ſeconde puiſſance, & qu'elle deſcend enſuite ; comme ici dans cette équation du quatriéme degré.

$$\underset{A}{x^4} - \underset{B}{4x^3} - \underset{C}{19x^2} + \underset{D}{106x} - \underset{E}{120} = 0$$

Faites attention aux parties du premier membre de cette Equation. L'inconnue x qui eſt dans la premiere partie A, y eſt élevée juſqu'au quatriéme degré, & elle deſcend dans les autres parties ; car dans la ſeconde partie B, elle eſt abaiſſée au troiſiéme degré. En C, elle eſt deſcendue au ſecond, & en D juſqu'au premier.

Ces parties ſont ce qu'on appelle les termes d'une équation, qui ſe nomment premiers, ſeconds, troiſiémes, ſelon que l'inconnue deſcend & a moins de dimenſions. La derniere partie E, oú x la grandeur inconnue ne ſe trouve point ſe nomme le dernier terme. Le premier, c'eſt celui dans lequel l'inconnue eſt dans le degré qui donne le nom à l'équation ; x^4, qui eſt dans la premiere place A, eſt le premier terme ; & 120, qui eſt dans la derniere place E, eſt le dernier terme. On dit qu'une équation eſt ordonnée quand il y a de l'ordre en ſes termes ; que la plus haute puiſſance de l'inconnue en eſt le premier terme, & que les autres puiſſances de ſuite de la même inconnue en ſont les autres termes ſelon leurs degrés. Ainſi cette équation eſt ordonnée.

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0.$$

On ne compte que pour un terme, deux ou plusieurs grandeurs qui sont mêlées avec le même degré de l'inconnue, ou dans lequel deux ou plusieurs grandeurs connues se trouvent avec le même degré de l'inconnue. Ainsi $bx + cx$ ou $bx - cx$ ne peuvent faire qu'un terme, car il n'y a qu'à corriger leur expression, prenant, par exemple, d qui soit égal à $b + c$; ainsi au lieu de $bx + cx$, écrire dx. Si on ne fait pas cette réduction, il faut écrire dans une même colomne, ou l'un sous l'autre, tout ce qui ne peut faire qu'un terme. Ainsi avant la réduction il faudroit écrire

$+ bx$.
$+ cx$.

Considérons encore ici comment, pour faire ces réductions, on peut changer une expression dans une autre, un quarré dans un plan, un plan dans un quarré. Si au lieu de aa, on veut avoir un plan égal, ayant pris à discrétion une grandeur plus petite ou plus grande que a, il faut en trouver une seconde, telle qu'entre ces deux, a soit un moyen proportionnel. Si c'est m & n, & qu'ainsi $\div\, m.\ a.\ n.$ il est évident que $mn = aa$. Si on vouloit donc changer le plan mn dans un quarré de même valeur, il faudroit trouver un moyen proportionnel entre m & n.

Les termes d'une équation sont complexes ou incomplexes, selon que leur expression est simple ou composée. Un terme comme celui-ci $+ bx + cx$ qui n'en fait qu'un, est complexe. Si on le changeoit; & qu'ayant pris d égal à $b + c$, on fît $dx = bx + cx$, ce terme dx seroit incomplexe. Autant qu'on le peut il faut faire ensorte que les termes d'une équation deviennent incomplexes, s'ils ne le sont pas. Ainsi dans cette équation, dont le dernier terme est complexe,

$$xx - ax + bb - cc = 0.$$

il faut, pour le rendre incomplexe, ſuppoſer $bb - cc = dd$; & au lieu de $bb - cc$, écrire dd qui eſt un-terme incomplexe. De même dans cette équation.

$$xx = \frac{axx + ccd}{a - b}$$

Ou dans celle-ci, qui eſt la même choſe,

$$xx = \frac{axx}{a - b} + \frac{ccd}{a - b}$$

Diviſant aa par $a - b$ qui ſont des grandeurs connues, & nommant g le quotient de cette diviſion. Diviſant de même ccd par $a - b$, & nommant bb le quotient de cette diviſion, j'aurai cette expreſſion $xx = gx + bb$, où le ſecond & le dernier terme ſont complexes. C'eſt par le moyen de ces réductions & corrections qu'on réduit les équations de chaque dégré à de certaines formules, dans leſquelles la grandeur inconnue ſe trouve ſeule dans le premier terme; comme celle qui eſt connue ſe trouve toute ſeule dans le dernier. Dans les autres termes, on appelle *coëfficiens* ou grandeurs *coëfficientes*, celles qui ſe trouvent mêlées avec les grandaurs qui compoſent ces termes, comme dans les termes B, C, D, de l'équation précédente, les chiffres 4. 16. 106, ſont des grandeurs *coëfficientes.* Il eſt bon de ſe ſouvenir que lorſqu'on éleve une grandeur complexe ou un Binome, à quelque degré qu'on l'éleve, tous les termes dont elle ſera compoſée ſont en proportion, après qu'on en a ôte les nombres coëfficients; car, par exemple, le produit de $a + b$ par $a + b$ eſt $aa + 2ab + bb$; ôtez ce nombre 2, qui eſt dans le ſecond membre, & qui eſt coëfficient, alors $\div\!\div$ $aa.\ ab.\ bb.$

S v

Il y a des équations dont tous les termes ne paroiſſent pas, comme en celle-ci, qui n'a point de ſecond terme.

$$xx \; . \; . \; . \; bb = 0$$

Cela arrive lorſque la même valeur ſe trouve avec des ſignes contraires qui ſe détruiſent; ainſi on la ſupprime en corrigeant les expreſſions. Par exemple, dans celle-ci, dont les racines ſont $x - a$ & $x + a$, c'eſt-à dire, qui eſt faite de la multiplication de $x - a$ par $x + a$.

$$xx + ax - ax + aa = 0.$$

Pour corriger l'expreſſion, je ſupprime $+ ax$ $- ax$, qui ont des ſignes qui ſe détruiſent, après quoi il n'y a plus de ſecond terme.

$$xx \; . \; . \; . + aa = 0.$$

III.

Des Racines d'une équation.

On nomme Racines d'une Equation les valeurs de l'inconnue par la multiplication deſquelles une équation a été compoſée. Ainſi, ſi on ſuppoſe $x = 2$ ou $x - 2 = 0$, & $x = 3$ ou $x - 3 = 0$, & qu'on multiplie $x - 2$ par $x - 3$, on aura cette équation $xx - 2x - 3x + 6 = 0$, qui étant corrigée, deviendra

$$xx - 5x + 6 = 0, \text{ ou } xx = 5x - 6.$$

Les Racines de cette équation ſont $x - 2$ & $x + 3$. Que ſi de rechef on ſuppoſe $x - 4 = 0$, & qu'on multiplie la précédente équation $xx - 5x + 6 = 0$, par cette Racine, on aura cette équation.

$$x^3 - 7xx + 26x - 24 = 0$$

dont les trois racines ſont 2. 3. 4. qui ſont les

différentes valeurs. Ce n'est pas que dans la résolution d'un Problême, on puisse supposer qu'une même grandeur ait différentes valeurs; mais c'est qu'on appelle Racines d'une équation les grandeurs par la multiplication desquelles elle peut être formée; & que celle, par exemple, qu'on vient de proposer, se peut concevoir comme étant formée de ces trois racines $x-2=0$, $x-3=0$. $x-4=0$.

Ces Racines sont nommées vraies ou fausses, selon qu'elles expriment des grandeurs réelles & positives, ou des grandeurs négatives, c'est-à-dire, moindres que zéro.

Le dégré où l'inconnue est élevée fait connoître combien l'équation a de racines, & les signes $+$ & $-$ font appercevoir quand elles sont vraies ou fausses.

Dans une équation qui a plusieurs racines, comme dans celle-ci.

$$x^3-9x^2+26x-24=0.$$

dont les racines sont 2. 3. 4. qui sont vraies ou positives, la grandeur connue 9, qui est au second terme $9x^2$, est égale à la somme de toutes ces racines. $2+3+4=9$. La grandeur connue du troisiéme terme $26x$ est égale à la somme des produits de ces racines prises deux à deux, c'est-à-dire, aux produits, 1°. de 2 & de 3, ce qui fait 6. 2°. de 2 & de 4, qui fait 8. 3°. de 3 & 4, c'est-à-dire, 12. Ces produits font 26. La grandeur du dernier terme, qui est entierement connue, est égale à 6 produit de la premiere & de la seconde, multiplié par la troisiéme 4, ce qui fait 24. Cela se reconnoît en composant cette équation, c'est à-dire, en multipliant ses Racines.

Il est évident qu'une équation qui contient plus-

ſieurs Racines peut être diviſée par un Binome compoſé de l'inconnue moins la valeur de l'une des Racines vraies, laquelle que ce ſoit, ou plus la valeur de l'une des fauſſes ; au moyen de quoi on diminue d'autant ſes dimenſions. Réciproquement ſi la ſomme d'une équation ne peut être diviſée par un Binome compoſé de l'inconnue $+$ ou $-$ quelqu'autre grandeur, c'eſt une marque que cette autre grandeur n'eſt point la valeur d'aucune de ſes Racines. Cette équation, par exemple, peut être diviſée par $x-2$.

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0.$$

& par $x-3$, & par $x-4$, & par $x+5$, mais non point par $x+$ ou $-$ aucune autre grandeur ; ce qui montre qu'elle ne peut avoir que les quatre racines 2, 3, 4 & 5.

Les racines d'une équation ſont, comme on vient de le dire, ou vraies ou fauſſes. Elles ſont encore ou réelles ou imaginaires. C'eſt ce qu'il faut expliquer, & rendre raiſon pourquoi il y a des racines imaginaires, & montrer qu'elles ſont d'uſage.

Nous avons vû & démontré que *moins en moins* donne *plus* ; ainſi il ne ſe peut pas faire que la racine quarrée de $-aa$ ſoit une grandeur réelle ; car le produit de $-a$ par $-a$, c'eſt $+aa$, comme on l'a vû, Liv. I. n. 36 & 37. Ainſi $\sqrt{-aa}$, c'eſt une racine imaginaire, c'eſt-à-dire, qu'elle n'eſt point réelle, puiſque $-aa$ ne peut être le produit de $-a$. Car $-a$ par $-a$ fait $+aa$. Cependant il y a des occaſions où l'on rencontre de ces racines imaginaires dont on peut faire uſage comme on le fait des quatriémes, cinquiémes, ſixiémes puiſſances, quoiqu'il n'y ait point de puiſſance dans la nature au-deſſus de la troiſiéme, qui eſt le cube.

IV.

On peut augmenter & diminuer, & multiplier & divifer les Racines d'une équation fans les connoître.

Sans connoître la valeur des racines d'une équation, on les peut augmenter ou diminuer de quelque grandeur connue. Il ne faut pour cela qu'au lieu du terme inconnu en fuppofer un autre qui foit plus ou moins grand de cette même grandeur connue, & le fubftituer partout en la place du premier. Comme fi on veut augmenter de 3 la racine de cette équation.

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0.$$

Il faut prendre y au lieu de x, & penfer que cette grandeur y eft plus grande que x de 3, en forte que $y - 3$ eft égal à x; & au lieu de x^2 il faut mettre le quarré de $y - 3$, qui eft $y^2 - 6y + 9$, & au lieu de x^3 il faut mettre fon cube, qui eft $y^3 - 9y^2 + 27y - 27$; & enfin au lieu de x^4 il faut mettre fon quarré de quarré, qui eft $y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81$. Ainfi décrivant l'équation ci-deffus, & fubftituant par-tout y au lieu de x, on a l'équation fuivante, laquelle fe trouve corrigée au-deffous de la ligne, comme vous voyez.

$$\begin{array}{r} y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81 \\ - 4y^3 + 36y^2 - 108y + 108 \\ - 15y^2 + 114y - 171 \\ + 106y - 310 \\ - 120 \\ \hline \end{array}$$

$$y^4 - 15y^3 + 76y^2 + 4y - 420 = 0.$$

La racine vraie, qui étoit 5, eft maintenant 8, à caufe du nombre 3 qui lui eft ajouté.

Que ſi au contraire on veut diminuer de 3 la racine de cette même équation, il faut faire $y + 3 = x$ & $y^2 + 6y + 9 = x^2$, & ainſi des autres, de façon qu'au lieu de

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0,$$

on met :

$$\begin{array}{r} y^4 + 12y^3 + 54y^2 + 108y + 81 \\ - 4y^3 - 36y^2 - 108y + 108 \\ - 19y^2 - 114y - 171 \\ + 106y + 318 \\ - 120 \\ \hline y^4 + 8y^3 - 1y^2 - 8y \ast = 0 \end{array}$$

En augmentant les vraies racines d'une équation, il eſt évident qu'on en diminue les fauſſes; & au contraire en diminuant les vraies, on augmente les fauſſes. Je copie Deſcartes, mais je paſſe ce que je ne crois pas ſi néceſſaire ici.

On peut de même, ſans connoître la valeur des racines d'une équation, les multiplier ou diviſer toutes, par telle grandeur connue qu'on veut; ce qui ſe fait en ſuppoſant que la grandeur inconnue étant multipliée ou diviſée par celle qui doit multiplier ou diviſer les racines, eſt égale à quelqu'autre. Enſuite multipliant ou diviſant la grandeur connue du ſecond terme par celle qui doit multiplier ou diviſer les racines, & par ſon quarré, celle du troiſiéme ; & par ſon cube, celle du quatriéme, & ainſi juſqu'au dernier. Ce qui peut ſervir pour réduire à des nombres entiers & rationaux les fractions, & ſouvent auſſi les nombres ſourds, qui ſe trouvent dans les termes des équations. Comme ſi on a cette équation,

$$x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} = 0,$$

& qu'on veuille en avoir une autre en sa place, dont tous les termes s'expriment par des nombres rationaux, il faut supposer $y = x\sqrt{3}$, & multiplier par $\sqrt{3}$ la grandeur connue du second terme qui est aussi $\sqrt{3}$; & par son quarré, qui est 3, celle du troisiéme terme, qui est $\frac{26}{27}$; & par son cube, qui est $3\sqrt{3}$, celle du dernier, qui est $\frac{8}{27\sqrt{3}}$. ce qui fait

$$y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} = 0.$$

Après cela, si on en veut avoir encore une autre en la place de celle-ci, dont les grandeurs connues ne s'expriment que par des nombres entiers, il faut supposer que $z = 3y$, & multipliant 3 par 3, $\frac{26}{9}$ par 9, & $\frac{8}{9}$ par 27, on trouve

$$z^3 - 9z^2 + 26z - 24 = 0,$$

où les racines étant 2, 3 & 4, on connoît de-là que celles de l'autre d'auparavant étoient $\frac{2}{3}$, 1 & $\frac{4}{3}$, & que celles de la premiere étoient $\frac{2}{9}\sqrt{3}$; $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

V.

Regle générale pour faire évanouir le second terme d'une équation.

Puisque + une grandeur — cette même grandeur = o. Donc pour faire évanouir le second terme d'une équation proposée, il faut, si l'on peut, substituer quelques grandeurs qui fassent que

le second terme de l'équation proposée se trouve affecté du signe + & du signe —, ce qui le détruira entierement, comme il est évident. Or pour cela il faut ajouter ou ôter des racines, selon la diversité de leurs signes + & — la grandeur inconnue qui se trouve au second terme après qu'on l'aura divisée par l'exposant de la puissance du premier, & substituant cette valeur dans l'équation, autant que faire se pourra, le second terme après les opérations faites ne s'y trouvera plus. Des exemples éclairciront cette regle.

Exemple pour le second dégré.

Soit cette équation dont il faille ôter le second terme, $xx - px + q = 0$, l'on prendra selon la Regle $x - \frac{1}{2}p = y$; donc $x = y + \frac{1}{2}p$ & $xx = yy + py + \frac{1}{4}pp$; cette équation est pour le premier terme; celle du second sera $-px = -py - \frac{1}{2}pp$. Donc

$$xx - pp + q = yy + py + \frac{1}{4}pp + q - py - \frac{1}{2}pp = 0;$$

& ôtant les termes qui se détruisent, il viendra enfin $yy * - \frac{1}{4}pp + q = 0$, où l'on voit que le second terme est évanoui.

Si l'équation proposée eût eu le signe + au second terme, on auroit pris $x + \frac{1}{2}p = y$., &

l'on auroit trouvé la même égalité résultante, n'ayant de différence que dans les signes.

Exemple pour le troisiéme dégré.

Soit cette équation $x^3 - pxx + qx + r = 0$, dont on veut faire évanouir le second terme; comme l'exposant du premier est 3, il faut, selon la Regle, prendre $x - \frac{1}{3}p = y$, donc $x = y + \frac{1}{3}p$; & $x^3 = y^3 + pyy + \frac{1}{3}ppy + \frac{1}{27}p^3$; de même $-pxx = -pyy - \frac{2}{3}ppy - \frac{1}{9}p^3$; & $qx = qy + \frac{1}{3}pq$. L'on aura donc $x^3 - pxx + qx + r = y^3$ . . . .

$+ pyy + \frac{1}{3}ppy + \frac{1}{27}p^3 + qy + \frac{1}{3}pq + r - pyy$

$- \frac{2}{3}ppy - \frac{1}{9}p^3 \qquad = 0.$

Et effaçant les termes qui se détruisent, il viendra enfin cette équation, qui n'aura plus de second terme $y^3 * - \frac{1}{3}ppy - \frac{2}{27}p^3 + qy + \frac{1}{3}pq + r = 0$.

Si l'égalité avoit eu le signe + au 2^e terme, l'on auroit supposé $x + \frac{1}{3}p = y$.

Il en est de même pour le quatriéme degré, n'y ayant de difficulté que la longueur du calcul.

Cette Regle est la même que celle que M. Descartes donne dans sa Géométrie, lorsqu'il dit que pour faire évanouir le second terme d'une équa-

tion, il faut retrancher des vraies racines, la quantité connue de ce second terme, divisée par le nombre des dimensions du premier, si l'un de ces deux termes ayant le signe $+$, l'autre a le signe $-$; ou bien les augmenter de la même grandeur, s'ils ont tous deux le signe $+$ ou tous deux le signe $-$, & c'est ce que nous avons fait; car pour les équations du second degré, nous avons pris la moitié de p, c'est-à-dire, que nous avons divisé p par 2, qui marquoit les dimensions de l'inconnue x^2. Le nombre 3 marque les dimensions du troisiéme degré. Aussi dans le second exemple nous avons pris le tiers de p, ce qui est diviser p par 3. Pour ôter le second terme de cette équation de quatre degrés.

$$y^4 + 16y^3 + 71y^2 - 4y - 420 = 0.$$

Ayant divisé 16 par 4 à cause des quatre dimensions du premier terme y^4, il vient de rechef 4; c'est pourquoi je fais $z - 4 = y$, & j'écris

$$\begin{array}{rrrrr} z^4 - 16z^3 & + 96z^2 & - 256z & + 256 \\ + 16z^3 & - 192z^2 & + 768z & - 1024 \\ & + 71z^2 & - 568z & + 1136 \\ & & - 4z & + 16 \\ & & & - 420 \end{array}$$

$$z^4 * - 25z^2 - 60z - 36 = 0.$$

Le second terme est évanoui, ou il ne doit plus paroître, parce que $- 16z^3 + 16z^3 = 0$.

Ainsi, pour faire évanouir le second terme d'une équation du quatriéme degré, il faut augmenter cette équation de $-$ le quart de la grandeur connue du second terme (ou du nombre coëfficient,

comme nous avons vû que ce mot se prenoit) si ce second terme a le signe +, ou + le même quart, si ce terme à le signe —.

CHAPITRE VIII.

De la résolution des Equations composées, ou moyen de résoudre les Problêmes du second, du troisiéme, & du quatriéme degré.

LEs Problêmes prennent leur nom des degrés des équations que l'on trouve en les examinant. On réduit, comme on l'a vû, à un certain degré les équations. C'est de ce degré qu'un Problême prend son nom. Si l'équation n'a qu'un degré, il se nomme *linéaire*, ou d'un degré. Si l'équation est du second degré, le Problême s'appelle *plan* ou du second degré. Si l'équation a trois degrés, le Problême est *solide*, ou de trois dégrés. Enfin on dit qu'il est du quatriéme degré ou *plus que solide*, si l'équation a quatre degrés. Les Problêmes linéaires ou du premier degré se résolvent comme nous avons vû. Quand l'inconnue se trouve seule dans l'un des membres, & que l'autre n'a que des grandeurs connues, la valeur de cette inconnue ne peut plus être inconnue. Tous les Problêmes du Chapitre sixiéme sont du premier degré. Parlons maintenant des autres Problêmes.

I.

Les termes d'une Equation de plusieurs dégrés se résolvent en proportion.

Les équations d'un même dégré se réduisent à

un certain nombre de formules, & toutes ces formules se peuvent réduire en proportion, qui fait connoître de quoi il s'agit pour résoudre un Problême. C'est ce qu'il faut considérer. On appelle Equation pure celle ou l'inconnue n'est point mêlée avec les inconnues, comme celle-ci $xx - ab = 0$. Quand cela n'est pas ainsi, on dit qu'elle est affectée. Cette équation pure $xx - ab = 0$ se change en cette proportion ⸫ $a.\ x.\ b.$ car $ab = xx$. Ainsi, pour résoudre cette équation, il s'agit de trouver entre deux grandeurs données une moyenne proportionnelle, qui sera la racine de cette équation ou la valeur de la grandeur inconnue x. Cette équation affectée $xx - ax - bc = 0$, se résout en cette proportion $x.\ b$ ⸫ $c.\ x - a$; ce qui fait connoître que pour résoudre entierement l'équation, il faut trouver quatre grandeurs proportionnelles, dont les deux moyennes soient données aussi bien que l'excès de la premiere sur la quatriéme, Or toutes les questions qu'on peut faire sur la maniere de trouver ces proportionnelles, se résolvent aisément, exprimant deux grandeurs inconnues, dont la différence est connue, en la maniere qu'on l'a expliqué, s. n. 23. Soit ⸫ $y,\ b,\ z$, & que la différence de y & de z soit 8. Il faut supposer que x est la moitié de $y + z$. Ainsi si y est plus petit que z, alors $x - 4 = y$ & $x + 4 = z$. Partant ⸫ $y.\ b.\ z$ & ⸫ $z - 4.\ b.\ x + 4$ sont une même chose. Le produit des extrèmes est égal à celui des moyens, ainsi $xx + 4x - 4x - 16 = bb$; où vous voyez que les signes contraires se faisant évanouir l'un l'autre, l'équation devient $xx - 16 = bb$, ou $xx = bb + 16$, qui est une équation pure, & partant facile à résoudre.

Toutes les équations de trois, de quatre, & de

pluſieurs autres degrés, ſoit qu'elles ſoient pures, ſoit qu'elles ſoient affectées, ſe réſolvent en proportion ; ce qui ne ſe pouvant expliquer en peu de paroles, je propoſerai une voie plus courte pour réſoudre les équations. De quelque degré que ſoit une équation, quand elle eſt pure, elle ſe réſout aiſément. Pour réſoudre celle-ci $x^2 = ab$, il ne s'agit que de tirer la racine quarrée de ab. Mais ſi ab n'eſt pas un nombre quarré, on ne peut pas exprimer en nombre la valeur de x. Pour réſoudre cette équation $x^3 = aab$, qui eſt pure, il faut tirer la racine cube de aab ; & ainſi des autres degrés ou puiſſances. Il ne s'agit donc que de la réſolution des équations affectées.

II.

Des différentes formules des Equations du ſecond degré, & de leur propriété.

Les équations d'un même degré ſe réduiſent donc comme nous l'avons dit, à un certain nombre de formules, qui ſont différentes, parce que leurs racines peuvent avoir différens ſignes. Pour entendre ceci, il faut ſçavoir que lorſqu'une équation eſt corrigée & abrégée, cela s'appelle *une formule*, c'eſt-à-dire, une expreſſion générale ou abrégée de toutes les équations du même degré qui ont le même nombre de termes, & la même diverſité dans leurs ſignes. Or les équations du ſecond degré ont ces quatre formules.

$$z^2 - pz - q = 0 \qquad z^2 = pz + q$$
$$z^2 - pz + q = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 = pz - q$$
$$z^2 + pz - q = 0 \qquad z^2 = -pz + q$$
$$z^2 + pz + q = 0 \qquad z^2 = -pz - q$$

La raiſon de ces quatre formules, c'eſt que ſi la

grandeur inconnue eſt négative, ſes racines ſeront ou $-p-q$ ou $+p+q$, ce qui fait deux cas. Si elle eſt poſitive, cela fait encore deux autres cas; car ces racines ſeront pareillement ou $-p+q$ ou $+p-q$. Je ſuppoſe dans la ſuite du Chapitre que la grandeur connue du ſecond terme eſt p, & celle du dernier terme qui eſt toujours connu, ſoit q. Les deux Théorêmes ſuivans contiennent le fondement de ce que l'on dira touchant la réſolution des équations de deux degrés.

Theoreme Premier.

Si $z=p+x$ *ou* $z=p-x$. *Le quarré* zz *de la grandeur entiere* z *eſt égal au plan fait de la partie* p, *&* *de la toute* z, *moins ou plus le plan de* zx

En multipliant $z=p+x$ par z, vient l'équation $zz=pz+xz$, comme en multipliant $z=p-x$ par z vient $zz=pz-xz$; ce qui fait voir à l'œil la vérité de ce Théorême, ſans qu'il ſoit beſoin d'autre démonſtration.

Corollaire.

pz *étant le ſecond terme, le plan* xz *eſt la valeur du dernier terme; ainſi* $xz=q$.

Nous ſuppoſons que $z^2=pz+q$. Par conſéquent, puiſque, ſelon ce Théorême $z^2-pz\pm xz$, il faut que $xz=q$.

Theoreme Second.

z *eſt égal à la moitié de* p, *plus ou moins la racine quarrée de* $\frac{1}{4}pp\pm q$.

Soit m moitié p, donc $2m = p$, & $4mm = pp$. Divisant les deux membres par 4, vient $mm = \frac{1}{4}pp$. Il faut donc prouver que $z = m + \sqrt{mm + q}$. Nous supposons $z = p + {+x}$ ou $z = m + m + x$; donc $z - m$ est égal à la racine du quarré de $m + x$, qui est $mm + 2mx + xx$. Ainsi $\sqrt{mm + 2mx + xx} = m + x$. Or puisque $z = p + x$ ou $z = 2m + x$. Donc $2mx + xx = xz$. Mais par le Corollaire précédent $xz = q$. Donc $2mx + xx = q$. Partant $z = m + \sqrt{mm + q}$; ou $z = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp \pm q}$, qui est ce qu'il falloit prouver.

III.

Résolutions des Equations du second degré.

Premier Cas.

Lorsqu'une Equation est incomplette.

On dit qu'une équation est complette lorsque tous les termes paroissent; si quelqu'un ou plusieurs sont évanouis, qu'elle est incomplette. Une équation du second degré incomplette se réduit à ces deux formules $xx * + q = 0$ & $xx * - q = 0$. En ôtant de la premiere formule, de part & d'autre q, vient $xx = -q$, cette formule montre que x est une grandeur négative. Prenant la Racine quarrée de l'un & l'autre membre on aura $x = \pm \sqrt{-q}$. La raison pour laquelle on met + & — devant le signe radical, en cette formule, c'est que le quarré $-q$ se peut faire égale-

ment de cette racine $+\sqrt{-q}$, multipliée par elle-même, ou de cette racine $-\sqrt{-q}$, multipliée auſſi par elle-même.

Dans l'autre formule $xx * -q = 0$, la grandeur inconnue x eſt poſitive. J'ajoute de part & d'autre q, ce qui donne cette équation $xx = q$; d'où ayant tiré les racines quarrées, la queſtion ſera réſolue $x = \sqrt{q}$. Si q n'eſt pas un nombre quarré, on ne pourra pas exprimer en nombre la juſte valeur de x.

Second Cas.

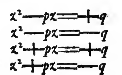
Lorſque l'Equation eſt complette.

On pourroit réſoudre cette équation comme dans le premier Cas; parce qu'il eſt toujours aiſé de la rendre incomplette, en faiſant évanouir ſon ſecond terme, comme on l'a enſeigné ci-deſſus.

Nous avons déjà dit que les équations du ſecond genre qui ont tous leurs termes ſe réduiſent à ces quatre formules.

$$z^2 - pz - q = 0 \qquad z^2 = pz + q$$
$$z^2 - pz + q = 0 \qquad z^2 = pz - q$$
$$z^2 + pz - q = 0 \qquad z^2 = -pz + q$$
$$z^2 + pz + q = 0 \qquad z^2 = -pz - q$$

Ces quatre formules ſe peuvent réſoudre par le Théorême 2 ci-deſſus. Voyons comme on le peut faire ſans le ſecours de ce Théoréme. Je transforme les quatre formules en celles-ci.



J'ajoute

J'ajoute de part & d'autre $\frac{1}{4}pp$, c'est-à-dire le quart du quarré de la grandeur connue du second terme ; & j'ai ces équations.

$$z^2 - pz + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp + q$$
$$z^2 - pz + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp - q$$
$$z^2 + pz + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp + q$$
$$z^2 + pz + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{4}pp - q$$

Après cela le dernier membre est une puissance parfaite, dont il est facile de tirer la racine quarrée. Celle de $z^2 + pz + \frac{1}{4}pp$ est $z + \frac{1}{2}p$. Ainsi, en faisant l'extraction des autres formules, on les réduit à celles-ci.

$$z - \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$$
$$z - \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$$
$$z + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$$
$$z^2 + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$$

Remarquez ces deux signes $\pm$ qu'on met devant le signe radical, pour faire connoître que z a deux

valeurs, ſelon qu'on prend cette grandeur poſitivement ou négativement.

Enfin ayant tranſporté $\frac{1}{2}p$ de l'autre côté, afin que l'inconnue ſe trouve ſeule, on a ces dernieres formules qui ſont la réſolution des précédentes.

$$x = +\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$$

$$x = +\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$$

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$$

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$$

C'eſt ce que nous avons démontré dans le ſecond Théorême ci-deſſus.

PROBLEMES DU SECOND DEGRE'.

Premier Probleme.

Le premier terme a *d'une progreſſion Arithmétique étant donné avec* b, *la différence qui regne dans la progreſſion*, & d *ſomme de tous ſes termes*, *trouver ſon dernier terme*, & *le nombre de tous les termes*.

Soit x le nombre de tous les termes. Selon ce qui a été démontré, Liv. 3. n. 28. le dernier terme d'une progreſſion contient le premier terme a, plus autant de fois la différence b, qu'il y a de termes moins une fois cette différence. Ainſi

le dernier terme sera $xb - b + a$, ce dernier terme avec le premier a, c'est-à-dire, $xb - b + 2a$ multiplié par x nombre des termes, est égal au double de d somme de la progression. Ainsi $xxb - bx + 2ax = 2d$. Pour corriger cette équation, je prends $c = - b + 2a$. Ainsi j'ai $xxb + cx = 2d$. Je divise le tout par b, & vient $xx + \frac{cx}{b} = \frac{2d}{b}$. Comme b est connu, si c'est par exemple 3, je prends p, tiers de c, & alors $px = \frac{cx}{b}$ & comme $\frac{2d}{b}$ est tout connu, je le fais égal à q, ainsi j'ai cette équation $xx + px = q$, ou $xx + px - q = 0$, qui est une équation du second degré, qui vient d'être résolue.

SECOND PROBLEME.

Deux Marchands ont mis en societé douze pistoles, & ils en ont gagné trente-quatre. Le premier a eu sept pistoles, tant pour mise que pour gain pour deux mois, & le second en a pris trente-neuf, tant pour sa mise que pour son gain pour cinq mois. On demande la mise & le gain d'un chacun en particulier.

J'appelle a la mise de ces deux Marchands, qui est douze pistoles. Donc si la mise du premier est x, celle du second est $a - x$.

Je nomme b la mise & gain du premier, qui est sept pistoles; ainsi $b - x$ est le gain du premier.

Je nomme c la mise & le gain du second, qui est 39 pistoles; ainsi puisque sa mise est $a - x$, donc $c - a + x$ sera son gain.

Comme x mise du premier, multipliée par son

tems, qui eſt 2, ce qui fait $2x$, eſt à ſon gain, qui eſt $b - x$; ainſi $a - x$ miſe du ſecond multipliée par ſon tems, qui eſt 5, ce qui fait $5a - 5x$, eſt à ſon gain, qui eſt, comme nous venons de le dire, $c - a + x$, c'eſt-à-dire, que $2x. b - x :: 5a - 5x. c - a + x$ Le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens; donc $2xc - 2ax + 2xx = 5ab - 5ax - 5bx + 5xx$. J'ajoute de part & d'autre $2ax$, & je retranche en même tems $2xx$, & j'ai $2xc = 5ab - 3ax - 5bx + 3xx$. J'ajoute de part & d'autre $3ax$ & $5bx$, ce qui me donne $2xc + 3ax + 5bx = 5ab + 3xx$.

Je prends $d = 2c + 3a + 5b$; ainſi $dx = 5ab + 3xx$. Je ſuppoſe encore $f = 5\ ab$, & qu'ainſi $dx = f + 3xx$. Je retranche f de part & d'autre; ce qui me donne $dx - f = 3xx$. Enfin au lieu de d, je prends $3p$, que je lui ſuppoſe égal; comme auſſi $3q$ égal à f; ainſi $px - q = xx$. Ce qui eſt une équation du ſecond degré qui a été réſolue.

IV.

Réſolution des Equations du troiſiéme degré.

Lorſque les équations du troiſiéme degré n'ont ni ſecond, ni troiſiéme terme, c'eſt-à-dire, qu'elles ne ſont point affectées, elles n'ont aucune difficulté. Par exemple, cette équation étant pure $z^3 = q$, il eſt évident que $z = \sqrt[3]{q}$; & qu'ainſi, pour trouver la valeur de z, il n'eſt queſtion que de tirer la racine cube de q. Quand une équation du troiſieme degré a tous ſes termes, il faut faire évanouir le ſecond, comme on l'a enſeigné ci-deſſus. Or les équations de ce degré, qui n'ont

point de seconds termes, se réduisent à ces quatre formules.

$$z^3 + pz + q = 0$$
$$z^3 - pz + q = 0$$
$$z^3 + pz - q = 0$$
$$z^3 - pz - q = 0$$

On résout ces quatre Cas par cette Méthode que Monsieur Varignon proposa dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, le 5 Août 1699, à la page 191. Edition d'Hollande.

Soit $z^3 + pz + q = 0$, équation à résoudre, qui est du troisiéme dégré, & qui n'a point de second terme. Prenez $z = x - y$, (il faudroit prendre $z = x + y$, si l'équation avoit $-pz$) & vous aurez le cube de z égal à celui de $x - y$. Ainsi $z^3 + x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$. Or $-3xxy + 3xyy = -3xy \times x - y$. Car écrivant au long le produit de $-3xy$ par $x - y$, il vient $-3xxy + 3xyy$. Mais puisque $x - y = z$, on a $-3xy \times x - y = -3xy \times z = -3xyz$. Maintenant dans l'équation précédente $z^3 = x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$; à la place de $-3xxy + 3xyy$, mettez la valeur $-3xyz$, & l'équation sera réduite à celle ci $z^3 = x^3 - 3xyz - y^3$; & en transposant tout d'un côté $z^3 +$

$$3xyz \begin{matrix} + y^3 \\ - x^3 \end{matrix} = 0$$

Si vous comparez terme à terme cette derniere équation avec la proposée $z^3 + pz + q = 0$, la comparaison du second terme vous donnera $3xyz = pz$, & divisant par z vous aurez $3xy = p$; & divisant encore par $3x$, vous

aurez $y = \frac{p}{3x}$; & par conſéquent $y^3 = \frac{p^3}{27x^3}$. Or la comparaiſon du troiſiéme terme vous donnera $y^3 - x^3 = q$, où mettant au lieu de y^3 ſa valeur $\frac{p^3}{27x^3}$; il viendra $\frac{p^3}{27x^3} - x^3 = q$; & multipliant par x^3, $\frac{1}{27} p^3 - x^6 = qx^3$; & tranſpoſant tout d'un côté, vous aurez $x^6 + qx^3 - \frac{1}{27} p^3 = 0$. Or $x^6 = x^3 \times x^3$ & $qx^3 = q \times x^3$. Ainſi on peut regarder x^6 comme un quarré dont x^3 eſt la racine, & qx^3, comme un plan dont q & x, ſont les racines : ainſi $x^6 + qx^3 - \frac{1}{27} p^3 = 0$, comme une équation du ſecond degré ; par conſéquent $x^3 = -\frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}$, ſelon ce qu'on a remarqué en parlant de la réſolution du ſecond dégré. Par la meme voie on trouve la valeur de y, ſçavoir $y^6 + qy^3 = \frac{1}{27} p$. Or puiſque $q = y^3 - x^3$, (on pourroit ſe ſervir auſſi de $y = \frac{p}{3x}$; c'eſt pour arriver d'abord aux formules qu'on commence par ici) l'on aura de même $y^3 = q + x^3 = \frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}$. Donc z

$$(x - y) = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$$

$- \sqrt[3]{\frac{1}{2} q \pm \sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{27} p^3}}$; ce qu'il falloit trouver.

On peut voir dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Année 1699, page 198, l'Écrit entier que Monsieur Varignon y a fait insérer, pour trouver ce que donneront encore les trois autres Cas de ce troisiéme dégré sans second terme. La forme du volume de mon Ouvrage ne me permet pas de rapporter cet Ecrit.

V.

Résolutions des Equations du quatriéme degré.

On suppose qu'on a fait évanouir le second & le quatriéme terme d'une équation du quatriéme degré qu'on veut résoudre. Mais si on la proposoit toute complette, il faudroit la rendre alors incomplette, en faisant évanouir ces deux termes. Or une équation incomplette de quatre degrés se résout comme celle de deux degrés. La quatriéme puissance se peut considérer comme la seconde, avec cette différence, que sa racine est un quarré. La racine de x^4 est x^2. Voilà quatre formules ausquelles on réduit ces équations : pour les résoudre, on pratique ce qui a été enseigné pour le second degré, comme vous le voyez ; mais, comme je l'ai dit, la racine est un quarré, qui est égal à des grandeurs toutes connues. Ainsi l'équation se trouve entierement résolue.

1. $x^4 = aabb. \quad xx = ab$ ou $x = \sqrt{ab}$

2. $x^4 = aaxx + aabb. \quad xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}$

3. $x^4 = -aaxx - aabb. \quad xx = -\frac{1}{2}2a + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - aabb}$

4. $x^4 = aaxx - aabb. \quad xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - aabb}.$

Pour avoir la valeur de xx, il faut prendre la racine quarrée de chaque membre ; car, comme on l'a dit, les racines que donne la résolution précédente sont des quarrés. Or en tirant la racine quarrée des deux membres, on a ces trois formules :

$$2.\ x = \sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}}.$$

$$3.\ x = -\sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - aabb}}.$$

$$5. = \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^4 - aabb}}.$$

Si l'on veut que tout le membre connu, à sçavoir $\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4. \pm aabb}$ soit nommé ab, tout se réduira à cette seule formule $xx = ab$, dont la résolution est $x = \sqrt{ab}$. Pour s'assurer que ces résolutions sont bonnes, il n'y a qu'à élever à la quatriéme puissance ces racines ; comme pour s'assurer d'une racine quarrée, on la quarre. Si alors elles sont égales aux grandeurs dont on prétend qu'elles sont les racines, elles le sont.

La seconde équation étoit $x^4 = aaxx + aabb$; dont la derniere solution est $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}}$; en quarrant chaque membre, l'on a $xx = \frac{1}{2}aa + \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}$.

En transposant $\frac{1}{2} aa$, l'on a $xx - \frac{1}{2} aa = \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + aabb}$; & quarrant chaque membre, on a $x^4 - aaxx + \frac{1}{4} a^4 = \frac{1}{4} a^4 + aabb$, qui se réduit à $x^4 - aaxx = aabb$ ou $x^4 = aaxx + aabb$, qui est l'Equation proposée. Ainsi des autres formules.

LIVRE HUITIEME.

SUPPLEMENT DES ELEMENS DES MATHEMATIQUES,

TRAITE'

De la progreſſion des nombres naturels & des nombres impairs. Les fondemens de l'Arithmétique des infinis.

Chapitre Premier.

Propriétés de la Progreſſion des nombres naturels.

1. ON appelle nombres naturels ceux dont la différence eſt l'unité, comme,

$\div$ 0. 1. 2. 3. 4. 5, 6. 7. 8. 9. 10. &c.

Ces nombres ſont une progreſſion qui peut être continuée juſqu'à l'infini. Je nomme *a* le premier terme de cette progreſſion, ſoit qu'on la com-

mence par zéro, soit par 1. Le dernier terme, de quelques termes qu'on compose la progression, sera nommé x ; & z le nombre des termes ; quel que soit ce nombre.

Lemme Premier.

x le dernier terme plus l'unité est égal au premier terme a plus z le nombre des termes. 2.

C'est-à-dire, que $x+1=a+z$, & par conséquent que $x=a+z-1$.

Le dernier terme x contient le premier terme a, & autant de fois la différence qui regne dans la progression, qu'il y a de termes devant lui. Livre III. n. 20. Or z est le nombre de tous les termes de la progression, partant égal moins 1 au nombre des termes qui précédent le dernier. Ce nombre est ainsi $z-1$. Donc $x=a+z-1$; ajoutant l'unité de part & d'autre, vient $x+1=a+z$; ce qu'il falloit prouver.

Premier Theoreme.

Si le premier terme est zéro, x le dernier terme plus l'unité est égal à z le dernier terme. 3.

C'est-à-dire, que $x+1=z$ ou $x=z-1$, car par le Lemme précédent $x=a+z-1$. Or ici a est zéro, qui ne fait rien ; on peut donc le supprimer, & partant $x=z-1$; ajoutant de part & d'autre l'unité, on aura $x+1=z$; ce qu'il falloit démontrer.

Second Theoreme.

Si le premier terme a est l'unité, le dernier terme x est précisément égal à z nombre des termes. 4.

Selon le Lemme $x=a+z-1$, ici $a=1$; donc $x=1+z-1$. Or $+1-1=0$, donc $x=z$; ce qu'il falloit prouver. Ainsi dans une progression de cinquante termes, si le premier est 1, le cinquantiéme est 50.

TROISIEME THEOREME.

5. *Le terme* (que je nomme y) *qui suivroit après* x *le dernier terme est égal au premier* a *plus à* z *nombre des termes.*

Il faut prouver que $y=a+z$. Ce terme y est plus grand d'une unité que le dernier x. Ainsi $x+1=y$ ou $x=y-1$. Mais par le Lemme précédent $x=a+z-1$; donc $y-1=a+z-1$ ou $y=+1+a+z-1$, & parce que $+1-1$ ce n'est rien, $y=a+z$; ce qu'il falloit prouver.

COROLLAIRE PREMIER.

6. *Donc si dans* $y=a+z$, *le premier terme* a *est zéro, le terme* y *est précisément égal à* z.

COROLLAIRE SECOND.

7. *Donc si dans* $y=a+z$, *le premier terme* a *est* 1 *: le terme* y *moins* 1 *est égal à* z, ou $z+1=y$.

QUATRIEME THEOREME.

8. *Le premier terme* a *étant zéro, le quarré de* x *dernier terme, plus ce même terme* x, *est égal au double de toute la progression.*

C'est-à-dire, que $xx+x$ est égal au double de la somme de toute la progression. La somme du

premier terme qui est ici zéro, & de x dernier terme, ne fait que x; & en ce cas $x=z-1$, ou $x+1=z$, §. n. 3. Or multipliant la somme du premier & du dernier terme, c'est-à-dire, ici x par z nombre des termes, ou par $x+1$ égal à z, le produit $xx+1x$ sera le double de la progression, selon ce qui a été démontré, Liv. III. n. 30. Partant xx quarré du dernier terme plus une fois x est le double de la progression; ce qu'il falloit démontrer.

Cinquieme Theoreme.

Le premier terme étant zéro, le quarré de y *qui suivroit le dernier terme* x, *moins une fois* y, *est égal au double de la progression des termes précédens.* 9.

On vient de prouver que $xx+x$ est le double de la somme de la progression, dont x est le dernier terme. Or le terme y qui suit ce dernier x étant plus grand de l'unité; & par conséquent $x=y-1$. Il faut que $xx=yy-2y+1$. Ajoutons la premiere équation $x=y-1$, viendra $xx+x=yy-2y+1+y-1$. Or $-2y+1+y-1=-y$, donc $xx+x=yy-y$: mais $xx+x$ est le double de la progression, dont x est le dernier terme; donc $yy-y$ est le double de la même progression.

Lemme Second.

Dans la progression naturelle soit ajouté à un nombre quarré le double de sa racine, plus l'unité, cela fera une somme égale au nombre quarré qui suit de plus près ce quarré. 10.

Soit aa un nombre quarré dont a est la racine.

Celle du nombre quarré qui suit de plus près est $a+1$, dont le quarré est $aa+2a+1$; ce qui montre que pour avoir un quarré qui suive de plus près un nombre quarré donné, il faut prendre $2a$ double de la racine plus l'unité. Ainsi pour avoir le quarré qui suive celui-ci 9, je lui ajoute 6 double de sa racine, & l'unité ; ce qui fait 16.

$$9+3+3+1=16.$$

Sixieme Theoreme.

11. *Le quarré d'un terme de la progression naturelle est égal au double des termes qui le précédent, plus le quarré du premier, plus encore la différence qui regne dans la progression multipliée par le nombre des termes qui précédent le terme donné.*

Soit cette progression $\div a.\ b.\ c.\ d.$ par le Lemme précédent.

$$dd=cc+2c+1$$
$$cc=bb+2b+1$$
$$bb=aa+2a+1$$

Je substitue ou j'écris $bb+2b+1$ en la place de cc ; comme $aa+2a+1$ en la place de bb, ce qui me donne

$$dd=\begin{cases} +2c+1 \\ +2b+1 \\ aa+2a+1 \end{cases}$$

Par conséquent le quarré de dd est égal, 1°. à aa quarré du premier terme a. 2°. à $2c+2b+2a$, c'est-à-dire, au double de tous les termes qui le précedent. 3°. à la différence 1 multipliée par le nombre des termes qui précedent, c'est-à-dire, ici à 1 multiplié par 3 ; ce qui fait 3.

Lemme Troisieme.

Si on ajoute à un nombre cubique, le triple du quarré de sa racine, plus le triple de la même racine, plus l'unité, cela sera une somme égale au nombre cubique, qui suit de plus près le cube proposé. 12.

Soit aaa un nombre cube, dont la racine est a, par conséquent $a+1$ sera celle du nombre cube, qui suit de plus près les cubes nombre aaa.

Le cube de $a+1$ est $aaa+3aa+3a+1$. Ce qui fait voir que le cube que l'on cherche est plus grand que le nombre cube aaa. 1°. du triple du quarré de sa racine a. 2°. du triple de la même racine. 3°. de l'unité. Ainsi 64 nombre cubique, qui suit de plus près le nombre cubique 27, est plus grand 1°. de 27, qui est triple de 9, quarré de sa racine cubique, qui est 3. 2°. de 9, triple de 3. 3°. de l'unité; car $27+27+9+1=64$.

Septieme Theoreme.

Le cube d'un terme de la progression naturelle est égal 1°. au cube du premier terme. 2°. Plus au triple des quarrés des termes qui le précedent. 3°. Plus au triple de la somme des termes qui le précedent. 4°. Plus à l'unité multipliée par le nombre des termes qui précedent ledit terme. 13.

Soit cette progression $+1. b. c. d.$ par le Lemme précédent.

$$d^3=c^3+3cc+3c+1$$
$$c^3=b^3+3bb+3b+1$$
$$b^3=a^3+3aa+3a+1$$

Substituant en la place de c^3 la grandeur égale

$b^3 + 3bb + 3b + 1$; & en celle-ci, au lieu de b, substituant la grandeur égale $a^3 + 3aa + 3a + 1$, on aura :

$$d^3 = \begin{cases} 3cc + 3c + 1 \\ 3bb + 3b + 1 \\ a^3 + 3aa + 3a + 1 \end{cases}$$

Partant le cube de d est égal, 1°. au cube a^3 du premier terme a. 2°. à $3cc + 3bb + 3aa$, c'est-à-dire, au triple des quarrés des termes précédens. 3°. à $3c + 3b + 3a$, c'est-à-dire, au triple de la somme de tous les termes de la progression qui le précédent. 4°. & outre cela au produit de l'unité multipliée par le nombre des termes qui le précédent, c'est-à-dire, que pour faire une somme égale au cube d^3, il faut encore ajouter à tout cela le nombre des termes qui le précédent, sa racine dans la progression : or ce nombre est 3, puisque d est le quatriéme terme, & que 3 fois 1 donne toujours 3.

COROLLAIRE.

14. *Le cube d'un terme de la progression naturelle, moins le cube du premier terme, moins le triple de la somme des termes qui le précédent, moins l'unité multipliée par le nombre des termes qui précedent ledit terme, est égal au triple des quarrés des termes qui le précedent*

Soit a le premier terme, s la somme des terres, t le nombre des termes ; & q la somme des quarrés. Par le Théoréme $d^3 = a^3 + 3q + 3s + 1$. Otant de part & d'autre $+ 1^3 + 3s + 1$., vient $d^3 - 1^3 - 3s - t = 3q$; ce qu'il falloit prouver.

Ce Corollaire nous en fait appercevoir trois autres d'une seule vûe.

1°. $d^3 - a^3 - 3q - 3ſ = t$.
2°. $d^3 - a^3 - 3q - t = 3ſ$.
3°. $d^3 - 3q - 3ſ - tſ = a^5$.

Ces Corollaires ſont ſi évidens & coulent ſi naturellement du Théorême propoſé, qu'il n'étoit preſque pas beſoin d'aucune autre démonſtration pour les prouver.

Huitieme Theoreme.

On voit bien encore que du ſixiéme Théorême, ʒ. n. 11. on auroit pû tirer de la même maniere trois Corollaires à peu près ſemblables.

Chapitre II.

Propriétés de la Progreſſion des nombres impairs.

Les nombres impairs ſont faits de l'addition des nombres naturels : par exemple, ce nombre 3, qui eſt le ſecond des impairs, eſt fait de l'addition du premier & du ſecond des naturels. 5, qui eſt le troiſiéme des impairs, eſt fait de l'addition du ſecond & du troiſiéme des naturels : ainſi de ſuite. 15.

Neuvieme Theoreme.

Si l'on diſpoſe ſucceſſivement & par ordre tous les nombres impairs 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13, *& les autres qui ſuivent ; le premier de ces nombres, qui eſt* 1, *ſera le premier nombre quarré ; ce quarré plus* 16.

3, qui le suit, donne 4 le second quarré; 4 plus 5 qui suit 3, donne 9 le troisiéme quarré; & ainsi de suite.

La raison de cela est claire; car $\overline{s}$. n. 10. ajoutant au quarré 1 deux fois sa racine plus l'unité, c'est-à-dire 3, l'on a le quarré qui le suit, qui est celui de 2; ajoutant au quarré 4 deux fois sa racine & l'unité, c'est-à-dire 5, on a le quarré de 3 qui est 9; ainsi de suite.

Dixieme Theoreme.

17. *Dans la progression des nombres impairs, le quarré du nombre des termes est égal à la somme de la progression.*

Le nombre 2 est la différence qui regne dans la progression des impairs. Soit nommé z le nombre des termes. Le dernier terme que je nomme x est égal au premier terme, plus la différence 2 multipliée par z moins une fois cette différence 2, Liv. III. n. 20. Partant $x = 1 + 2z - 2$. La somme du premier terme 1, & du dernier x, ou $1 + 2z - 2$, grandeur égale, est donc $1 + 1 + 2z - 2$ ou $2z$, puisque $+ 1 + 1 - 2 = 0$. Or cette somme étant multipliée par z, le nombre des termes, ce qui fait $2zz$, est le double de la progression; donc la moitié de $2zz$, qui est $1zz$ ou zz, est égale à la somme de toute la progression. Liv. III. n. 30. ce qu'il falloit prouver.

Ainsi dans une progression de nombres impairs, qui a dix termes, le quarré du nombre des termes, c'est-à-dire, le quarré de 10, est égal à la somme de tous les dix termes de la progression.

18. *On découvre d'admirables propriétés dans les nombres; elles sont infinies: considerez celle-ci,*

que j'expose seulement. Jettez les yeux sur la Table suivante de six colomnes. La premiere est la progression des nombres naturels.

La seconde colomne contient les quarrés de ces nombres qui sont faits de l'addition des nombres impairs qui précedent chaque quarré. Ainsi le deuxiéme quarré 4 est fait des deux premiers impairs 1 & 3. Le troisiéme quarré 9 est fait du premier, du second & du troisiéme des impairs, 1. 3. 5. Le quatriéme quarré 16 est fait de 1. 3. 5. 7. les quatre impairs : & c'est ce qui vient d'être démontré, s. n. 16.

La troisiéme colomne comprend les différences des quarrés des nombres naturels, & ces différences sont la progression des nombres impairs.

Dans la quatriéme colomne, sont les cubes des différences des quarrés en cette sorte. Le premier cube étant 1, pour faire le second, il faut ajouter les deux premieres différences 3 & 5 ; ce qui donne 8 second cube : pour avoir le troisiéme, il faut ajouter les trois différences suivantes, sçavoir, 7. 9 & 11, ce qui donne 27 troisiéme cube, & ainsi de suite. La raison de cela est fondée sur le Lemme 3e, s. n. 12.

Dans la cinquiéme, sont les différences des cubes.

Et dans la derniere, les différences de ces différences, qui sont une progression Arithmétique, dont la différence est 6.

Nombres.	Quarrés des nombres.	Différences des quarrés.	Cubes des nombres.	Différences des cubes.	Différences des différences des cubes.
1	1	3	1	7	12
2	4	5	8	19	18
3	9	7	27	37	24
4	16	9	64	61	30
5	25	11	125	91	36
6	36	13	216	127	42
7	49	15	343	169	48
8	64	17	512	217	54
9	81	19	729	271	60
10	100	21	1000	331	66

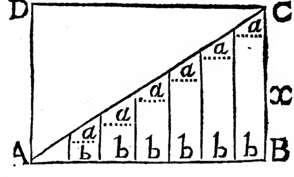
Chapitre III.

Fondement de l'Arithmétique des infinis.

19. DAns la progreſſion naturelle, l'unité eſt la différence entre deux termes qui ſe ſuivent immédiatement. La différence entre 4 & 5, c'eſt 1. Or ſi on interpoſoit entre ces deux nombres 4 & 5, & mille autres termes qui fuſſent auſſi en progreſſion Arithmétique, & qu'on fît la même choſe entre chacun des autres termes de la progreſſion, alors la différence qui régneroit dans la progreſſion ſeroit encore 1, mais un milliéme; & ſi on interpoſoit de même entre les termes de cette nouvelle progreſſion mille autres termes,

alors cela feroit une nouvelle progreſſion, dont la différence ſeroit encore 1, mais un milliéme de milliéme; continuant de même juſqu'à l'infini, enfin on viendra à une différence ſi petite, qu'on la pourroit concevoir ſans erreur comme nulle, c'eſt-à-dire égale à zéro. Cela feroit toujours une progreſſion naturelle, dont 1 ſeroit la différence, mais infiniment petite.

Quelque grandeur qu'on propoſe, on y peut concevoir une infinité de parties. Soit, par exemple, la ligne *A B*, dans laquelle je conçois une infinité de parties, telles que *b.*, ou une infinité de lignes élevées ſur ces parties *b*. Je ſuppoſe toutes ces lignes en progreſſion Arihmétique, 20.



croiſant également depuis *A* juſqu'à *B*. La ligne *BC* eſt la plus grande & le dernier terme de la progreſſion que je nomme *x*; je mene une ligne droite du point *A* au point *C*, & par les ſommets de ces lignes *b* de petites lignes qui font les petits triangles *a*. Il eſt évident que ſi on conçoit un grand nombre de lignes telles que *b*, qui couvrent la ſurface du triangle *ABC*, on pourra dire que la ſomme des lignes *b* ſera égale à la

ſurface du triangle *ABC*, après en avoir ôté la ſomme des petits triangles *a*. Or ſi le nombre des lignes *b* eſt infini ou innombrable, & qu'ainſi leur différence ſoit nulle, ou égale à zéro, en ce cas, comme tous ces petits triangles *a* ne ſont que des zéro, l'on pourra dire que la ſomme des lignes *b* ſera préciſément égale à la ſurface du triangle *ABC*.

La ligne *AB*, ſur laquelle ſont élévées les lignes *b*, peut être conſidérée comme le nombre des termes de la progreſſion que font ces lignes, & *BC* ou *x*, comme nous l'avons dit, en eſt le dernier terme; le premier c'eſt zéro. *AB*, qui repréſente le nombre des termes, ſoit nommée *z*, la ſomme du dernier terme *x*, & du premier qui eſt zéro, c'eſt-à-dire *x*, étant multipliée par *z*, le nombre des termes, le produit de cette multiplication qui eſt *zx*, ſera le double de toute la progreſſion des lignes *b*, ſelon ce qui a été démontré, Liv. III. n. 32. & cela ſe voit à l'œil; car $z = AB$ & $x = BC$. Ainſi $zx = AB \times BC$. Or il eſt évident que la figure *ABDC* eſt le double du triangle *ABC*. Ainſi on peut compter la valeur de ce nombre infini de lignes *b*, marquant préciſément la ſomme qu'elles font. C'eſt ce qui fait qu'on appelle cette méthode *l'Arithmétique des infinis*. Ceux qui la traitent expriment ainſi ce que nous venons de démontrer, & en font cette propoſition.

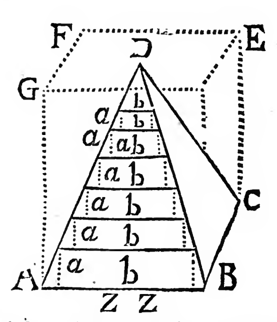
Une ſuite de lignes en progreſſion Arithmétique étant donnée, ſi on multiplie BC, *la plus grande de toutes ces lignes, par* AB, *ſomme de tous les termes, c'eſt à-dire*, x *par* z, *le produit* BC×AB *ou* xz *ſera le double de la ſomme de cette progreſſion.*

C'eſt ce que nous avons démontré poſitive-

ment; mais Wallis ne le fait que par induction.

Considérons les quarrés des nombres naturels. On voit que ceux des plus grands nombres ont entr'eux des différences plus considérables. La différence de 4, quarré de ce nombre 2, d'avec 9, quarré de 3, est 5 plus petite que celle des quarrés de 3 & de 4, sçavoir de 9, de 16 qui est 7. Ainsi cette différence croît selon que croissent les nombres impairs, comme nous l'avons remarqué, §. n. 18. Mais si on supposoit entre chacun des nombres de la progression naturelle un nombre infini de moyens proportionnels, qui fissent une nouvelle progression dans laquelle regnât une différence plus petite que toute grandeur qu'on puisse penser, alors on pourroit concevoir qu'il n'y auroit aucune différence sensible entre les quarrés de ces nombres qui feroient les termes de cette nouvelle progression.

Pour rendre la chose sensible, concevons les nombres quarrés des nombres de la progression naturelle, à commencer par zéro. Je suppose que tous ces quarrés, que je nomme *b*, sont mis les uns sur les autres. Le dernier ou le dessus est *D* zéro; le plus grand qui est dessous est *ABCA*. Ils décroissent en montant; mais je suppose qu'ils ont la même épaisseur, ou qu'ils sont en égale distance les uns des autres, ils font une pyramide; & s'ils ont l'épaisseur, ils font un solide égal à la solidité de la pyramyde *ABCD*, si on en ôte les petits triangles *a* que laissent les échelles que font tous ces quarrés étant mis les uns sur les autres, & décroissant comme ils font.



Mais si, au lieu d'un certain nombre fini de quarrés entre *A*, *B* & *D*, il y en avoit une infinité, leur différence *a* ne feroit nullement sensible, c'est-à-dire, qu'ils ne laisseroient point de triangles ou d'échelons sensibles sur la piramide qu'ils feroient; par conséquent leur solidité feroit sensiblement la même que celle de la pyramide *ABCD*. La question est de trouver quelle est la raison de la somme de tous ces quarrés *b* avec le produit du quarré *ABCA*, qu'on peut regarder comme le plus grand terme de la progression, multiplié par la hauteur de tous ces quarrés; ou par le nombre des termes de cette progression: ce qui feroit le solide *ABCEFG*. Le premier terme de la progression est zéro. Je suppose un nombre infini de termes, dont le plus grand est x, & par conséquent xx est le plus grand quarré de tous

tous les quarrés des termes de la progression, x étant le dernier terme $x+1$, s. n. 3. est le nombre des termes; ainsi $x+1=AG$, partant xx multiplié par $x+1$ est égal au solide $ABCEFG$; ainsi $x^3+xx=ABCEFG$. Or $x^3+xx+\frac{xx+x}{2}$ est le triple de la somme des quarrés de la progression naturelle: donc $ABCEFG$ plus $\frac{xx+x}{2}$ est le triple de tous ces quarrés. Il n'est donc question que de montrer que cette différence $\frac{xx+x}{2}$ est de nulle considération.

Les différences de tous ces quarrés sont une progression de nombres impairs, s. n. 18. qui a un nombre de termes égal à celui de la progression des nombres naturels dont on considere les quarrés. Ainsi $x+1$ est encore le nombre des termes de cette progression d'impairs, partant le dernier terme de ces impairs est encore x; or le premier terme étant zéro, donc $x+0$, ou x multiplié par $x+1$, le nombre des termes, fait $xx+x$, double de toute la progression des impairs: ainsi $\frac{xx+x}{2}$ est la juste somme de la progression que font ces différences. Par l'hypothese la différence de tous ces quarrés est nulle, ou n'est pas sensible; donc $\frac{xx+x}{2}$ ne doit point être consideré; ainsi on peut dire que la somme de tous ces quarrés est le tiers du solide $ABCEFG$, qui est ce qu'il falloit démontrer.

En suivant la méthode que nous avons employée, on pourroit démontrer sur les autres

puiſſances, ce que nous avons démontré de la premiere & de la ſeconde puiſſance : ſavoir, par exemple, que la ſomme des termes d'une progreſſion naturelle infinie eſt le quart du produit du cube du dernier terme multiplié par le nombre des termes. Ainſi de toutes les autres puiſſances.

TRAITÉ

Des Progreſſions Arithmétiques & Géométriques jointes enſemble.

De la compoſition & de l'uſage des Logarithmes.

AVERTISSEMENT.

LES deux progreſſions Arithmétique & Géométrique ont des propriétés conſidérables quand elles ſont jointes enſemble. Elles le ſont dans le Triangle Arithmétique dont M. Paſcal a fait un Traité. J'expoſerai ſommairement les propriétés de ce Triangle, que je ſuppoſe fait tel que cet Auteur le repréſente. J'en conſidere les propriétés principales, qui réſultent de la diſpoſition des nombres qu'il renferme, toutes ſi évidentes, qu'il n'eſt point néceſſaire de les démontrer autrement qu'en les expoſant.

CHAPITRE PREMIER.

Propriété du Triangle Arithmétique, qui comprend celles des progressions Arithmétique & Géométrique.

IL faut d'abord remarquer dans ce Triangle une progression, qui consiste en ce que chaque base contient une cellule plus que la précédente. Il n'y en qu'une dans l'angle droit, sçavoir, la cellule *A*; après laquelle suivent les deux cellules *B* & *L* après elle: il y en a trois autres dans la base qui suit, qui sont *C*, *A*, *M*.

La cellule *A* est appellée la Génératrice, & le nombre 1 qui y est le Générateur. Il est arbitraire, on y peut mettre tout autre nombre; mais celui là posé, il faut qu'en chaque cellule il y ait un nombre égal aux deux des deux cellules, l'un supérieur dans le rang parallele, l'autre qui la précéde dans le rang perpendiculaire. Ici l'unité étant la Génératrice, ce nombre 6 de la cellule *a* est égal à $3+3$ des cellules *B*, *K*. De même 3 de la cellule *B* est égal à $1+2$ des cellules *C*, *A*; & 3 de la cellule *K* est égal à $2+1$ des cellules *A*, *M*.

Cela étant, voici les autres propriétés qu'il faut considérer dans ce triangle, & qui en sont comme des conséquences nécessaires.

1°. Chaque cellule est égale à la somme de toutes celles du rang parallele précédent, comprises depuis son rang perpendiculaire jusqu'au premier inclusivement.

$10=1+2+3+4$, ou $b=L, A, B, C.$

2°. Chaque cellule égale la somme de toutes celles du rang perpendiculaire précédent, comprises depuis son rang parallele jusqu'au premier inclusivement.

10=1+3+6, ou *b*=*C*. *B*. *a*.

3°. Chaque cellule diminuée de l'unité, est égale à la somme de toutes celles qui sont comprises entre son rang parallele & son rang perpendiculaire, exclusivement.

15—1=4+3+2+1+1+1+1+1, ou *c*—1=*C*+*B*+*A*+*L*+*D*+*C*+*B*+*A*.

4°. Chaque cellule est égale à sa réciproque *B*=*L* & *B*=*K*.

5°. Un rang parallele & un perpendiculaire, qui ont un même exposant, sont composés de cellules toutes pareilles; par exemple,

Le rang parallele, dont 6 est l'exposant, contient les cellules 1. 6. 21. 56. 126. lesquelles sont égales à celles du rang perpendiculaire, qui a le même exposant.

6°. La somme des cellules de chaque base est double de celle de la base précédente.

O+*K*+*B*+*D* est le double de *M*+*A*+*C*.

7°. La somme des cellules de chaque base est un nombre de la progression Géométrique double, qui commence par l'unité; dont l'exposant est le même que celui de la base.

÷÷ 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c..

8°. Chaque base diminuée de l'unité est égale à la somme de toutes les précédentes.

N+*K*+*B*+*D*—*A*=*M*+*A*+*C*+*B*+*L*+*A*.

La quatriéme base est de 8, & les trois premieres de 7.

9°. La somme de tant de cellules continues qu'on voudra d'une base, à commencer par une

extrêmité, est egale à autant de cellules de la base précédente, plus encore à autant hormis une :

Prenant ces trois cellules *N. K. B.* de la quatriéme base, leur somme, qui est 7, est égale aux trois cellules *M*, *A*, *C*, de la base précedente ; plus encore les mêmes cellules, hormis C. Mr. Pascal appelle cellules de la Dividente celles que la ligne qui divise l'angle droit par la moitié traverse diagonalement ; comme *Δ*, *A*, *a*, *m*, *s*.

10°. Chaque cellule de la Dividente est double de celle qui la précede dans son rang parallele ou perpendiculaire. *a* est double de *B*, comme aussi de *K*.

11°. Deux cellules contigues, comme *a* & *L*, étant dans une même base, la supérieure est à l'inférieure, 6 à 4, comme la multitude des cellules depuis la supérieure jusqu'au haut de la base, à la multitude de celles depuis l'inférieure jusqu'en bas inclusivement ; car il y en a trois au-dessus de *a* en comptant *a* ; sçavoir, *a*, *C*, *E*, & au-dessous il n'y en a que deux *L* & *O*.

12°. Deux cellules contigues *b* & *m* étant dans un même rang perpendiculaire, l'inférieure est à la supérieure, 20 à 10, comme 6 exposant de la base supérieure à 3, exposant de son rang parallele.

13°. Deux cellules contigues *B* & *C* étant dans un même rang de paralleles, la plus grande est à la précédente, comme 4 exposant de la base de cette précédente, à 3 exposant de son rang perpendiculaire.

14°. En tout Triangle Arithmétique, comme dans le Triangle *A D N*, la somme des cellules d'un rang parallele, comme ici le second *L*, *A*, *B*, est à la derniere de ce rang, c'est-à-dire, à *B*, comme l'exposant du Triangle est à l'exposant du rang parallele qui est ici 2,

15°. Soit un Triangle quelconque, par exemple, le cinquiéme *A E O*, quelque rang parallele qu'on y prenne, par exemple, le troisiéme. La somme de ses cellules *M*, *K*, *a* qui est 10, est à N, *L*, celles du quatriéme, comme 4 exposant du rang quatriéme est à 2 exposant de la multitude de ses cellules; car il n'y en a que deux de ce rang qui soient dans le Triangle *A E O*.

Ce que je viens de dire suffit pour comprendre qu'on peut unir ensemble les deux progressions Arithmétique & Géométrique. L'Auteur de ce Triangle Arithmétique montre qu'il a plusieurs autres propriétés dont on peut faire usage: C'est ce que je ne dois pas entreprendre d'expliquer dans ces premiers Elémens, je dirai seulement qu'il sert à trouver les ordres numériques dont on a parlé ci-dessus, Liv. II. n. 19. Vous voyez, par exemple, vis-à-vis du troisiéme ordre, la cellule *a*, ce nombre 6 formé par l'addition des nombres du second ordre qui sont dans les cellules *L*, *A*, *B*. Sçavoir, 1, 2, 3, & ainsi du reste.

CHAPITRE II.

L'union de la progression naturelle des nombres, avec une progression Géométrique, se nomme Logarithme.

Le zéro, ainsi qu'on l'a remarqué, peut être consideré comme un milieu entre la grandeur positive & la grandeur négative; ce qui est positivement grand peut être si petit, & si

infiniment petit, qu'on le peut ſuppoſer égal à zéro. Conſidérant donc une grandeur qui commence, & qui croît toujours dans une même proportion Arithmétique, & par conſéquent dont les accroiſſemens ſont une progreſſion Arithmétique, on peut dire que zéro en eſt le premier terme; les autres termes ſont les nombres comme ils ſe ſuivent naturellement. Voici cette progreſſion.

÷ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. &c.

Au lieu de conſidérer que cette grandeur qui commence depuis le zéro croiſſe par l'addition, comme elle fait dans la progreſſion Arithmétique, concevons qu'elle croît par la multiplication, c'eſt-à-dire, qu'étant multipliée continuellement par elle-même, on l'éleve à tous ſes degrés ou puiſſances. Ces puiſſances ſont une progreſſion Géométrique, comme on l'a prouvé, Liv. IV. n. 31. Voici cette progreſſion que font les dégrés de *a*.

$$\div\!\div\ a^0.\ a^1.\ a^2.\ a^3.\ a^4.\ a^5.\ a^6.\ a^7.\ a^8.\ a^9.$$

dans laquelle on remarquera que le premier terme a^0 eſt égal à 1. Car ces trois grandeurs a^0, a^1, a^2, doivent être en progreſſion Géométrique.

Donc $a^0 \times a^2 = a^1 \times a^1 = a^2$. Donc $a^0 = \frac{a^2}{a^2} = 1$.

Tous les degrés d'une grandeur ainſi exprimés font deux progreſſions, l'une Arithmétique, l'autre Géométrique. La ſuite des nombres naturels qui expoſent les degrés de cette grandeur, font une progreſſion Arithmétique; & les puiſſances marquées par les degrés en font une Géométrique; ce qui eſt évident.

÷ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. &c.

$$\div\!\div\ a^0.\ a^1.\ a^2.\ a^3.\ a^4.\ a^5.\ a^6.\ a^7.\ a^8.\ a^9.\ a^{10}.\ \&c.$$

C'eſt l'union de ces deux progreſſions qu'on nomme Logarithmes. Ce nom eſt compoſé de deux noms : le premier ſignifie *raiſon*, & l'autre *nombre*. Ce mot *Logarithme* ſignifie proprement des nombres en progreſſion Arithmetique, qui correſpondent à d'autres nombres qui ſont en progreſſion Géométrique. Par le moyen de cette union, on abrege pluſieurs opérations Arithmétiques. Vous voyez ici que la ſomme ou l'addition de deux nombres de la progreſſion Arithmétique eſt l'expoſant d'une puiſſance faite par la multiplication des deux puiſſances, dont ces deux nombres ſont les expoſans. Ainſi, par exemple, $2+3$ ou 5 eſt l'expoſant de a^3, qui eſt une puiſſance faite par la multiplication de a^2 par a^3, ou de aa par aaa ; car ce produit eſt $aaaaa$ ou a^5, ſuivant les regles de la multiplication.

Dans les progreſſions Arithmétiques, on fait par l'addition & la ſouſtraction ce qui ne ſe fait dans la progreſſion Géométrique que par la multiplication & par la diviſion, qui ſont des opérations beaucoup plus longues. Ainſi en ajoutant ici les expoſans 3 & 6, ce qui fait 9, on a l'expoſant de la neuviéme puiſſance qui eſt faite par les puiſſances troiſiéme & ſixiéme multipliées l'une par l'autre. Par conſéquent la différence de deux expoſans eſt le quotient de deux puiſſances diviſées l'une par l'autre. Ainſi $9-6$ ou 3 différence de 9 & de 6, eſt le quotient ou la puiſſance qui réſulte de la puiſſance neuviéme diviſée par la ſixiéme. La puiſſance qui réſulte de cette diviſion eſt la troiſiéme. La diviſion défait ce que la multiplication avoit produit. Or pour diviſer a^9 par a^6, il faut ôter ſix a de neuf a, & les trois a qui reſtent ſont le quotient de cette diviſion.

Chapitre III.

De la composition des Tables des Logarithmes.

L'Union des deux progressions Arithmétique & Géométrique donnant donc le moyen de trouver par l'addition & par la soustraction ce qu'autrement on ne trouve que par la multiplication & par la division, qui sont des opérations difficiles, on s'est avisé de joindre ces deux progressions, & de composer des Tables qui continssent des nombres naturels depuis l'unité jusqu'à cent mille & plus, avec leurs Logarithmes propres, c'est-à-dire, des nombres qui fissent une progression Arithmétique, & fussent les exposans d'autant de termes d'une progression Géométrique. Pour comprendre mieux ce que c'est que ces Logarithmes & leurs usages, il faut faire voir de quelle maniere ils se trouvent, c'est-à-dire comment on a composé les Tables qui les contiennent. Considerez ces deux progressions, ou parties de progressions que vous voyez. L'une est des nombres naturels, & a pour son premier terme zéro. Dans la progression Géométrique regne la raison décuple, comme la différence qui regne dans l'Arithmétique, c'est 10000000. On verra pourquoi ce grand nombre de zéro dans la progression Arithmétique, & pourquoi je ne lui donne pour son premier terme que des zéro, lesquels répondent à 1, qui est le premier terme de la Geométrique. On a pris ce mot *Logarithme* pour le terme d'une progression Arithmétique, qui répond à un

terme d'une progression Géométrique ; ce nombre 10000000 de la progression Arithmétique est donc le Logarithme de 10 un des termes de la Géométrique.

Géométrique.	*Arithmétique.*
1	00000000
10	10000000
100	10000000
1000	30000000
10000	40000000
100000	50000000
1000000	60000000

Vous ne voyez pas ici les Logarithmes de 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8 9. & c'est ce qui est nécessaire, si on veut avoir la suite des Logarithmes de tous les nombres comme ils suivent depuis l'unité. Ils ne se trouvent qu'avec un travail infini, dont vous allez voir un échantillon. Le Baron de Neper, Ecossois, commença ce travail l'an 1614. Brigge, Anglois, le perfectionna. Pour juger combien il est grand, il suffit de chercher le Logarithme de 9, & on connoîtra par-là la grandeur du travail ; car pour le trouver, il faut auparavant trouver tant de moyens proportionnels entre 1 & 10, qu'enfin on en trouve un égal à 9, ou dont la différence avec ce nombre ne soit pas considérable. Il faut en même tems chercher à chacun de ces moyens proportionnels, un terme dans la progression Arithmétique aussi moyen proportionnel, qui lui réponde, pour avoir enfin le Logarithme de 9, qu'on ne peut assigner autrement.

C'est par l'extraction des Racines qu'on trouve des moyens proportionnels entre deux nombres

donnés, comme on l'a enseigné. Ces produits ne sont pas toujours des puissances parfaites ou nombres quarrés ou cubes; ainsi comme on n'en peut avoir que des racines approchées, au lieu de 1 & de 10, on prend ces grands nombres 1. 0000000 & 10. 0000000, qui sont en même raison, afin que l'erreur ne soit pas sensible. Prenez garde à cette Table que vous voyez devant vos yeux. Ce n'est que le commencement d'une qui est la plus grande, qui se trouve dans tous les Auteurs qui traitent des Logarithmes. Elles représentent les supputations qu'il faut faire pour trouver le seul Logarithme de 9. Jugez de-là du travail de la composition des Tables entieres des Logarithmes.

Proportions Géométriques.		*Logarithmes.*
A	1. 0000000	0. 0000000
C	3. 1622777	0. 50000000
B	10. 0000000	10. 0000000
B	10. 0000000	10. 0000000
D	5. 6234132	0. 75000000
C	3. 1622777	0. 50000000
B	10. 0000000	10. 0000000
E	7. 4989421	0. 87500000
D	5. 6234132	0. 75000000

Il faut chercher un moyen proportionnel entre ces deux nombres *A* & *B*. On trouve *C* en multipliant *A* par *B*, & tirant la racine quarrée de leur produit; après cela on cherche le Logarithme de C, c'est-à-dire, un nombre qui soit moyen Arithmétique entre 0. 0000000 & 10. 0000000.

On le trouve ajoutant ces deux termes en une ſomme, dont la moitié eſt le moyen Arithmétique qu'on cherche. Puiſque dans cette progreſſion le premier terme n'eſt rien, il ſuffit de prendre la moitié de l'autre terme.

Or le moyen proportionnel *C* qu'on a trouvé eſt moindre que 90000000, il faut donc chercher un autre moyen proportionnel entre le moindre *C* & le plus grand *B*. Je trouve *D* & ſon Logarithme; mais comme ce moyen *D* eſt encore moindre que celui qu'on cherche, il faut de même chercher entre *D* & le plus grand terme *B* un troiſiéme moyen proportionnel, on trouve *E* & ſon Logarithme, qui ne ſera point encore celui que l'on cherche. Mais enfin en continuant de chercher entre le prochainement moindre & le prochainement plus grand des moyens Géométriques proportionnels, on aura des nombres qui approcheront toujours de plus en plus du nombre propoſé 9000000, lequel enfin ſe trouvera le vingt-ſixiéme moyen proportionnel, comme on le voit dans les Auteurs qui rapportent cette opération en toute ſon étendue. Quel eſt donc le travail, quand il faut compoſer des Tables entieres, c'eſt-à-dire trouver des Logarithmes depuis l'unité juſqu'à cent mille, & encore plus loin, puiſque ſeulement pour les Logarithmes de 9 il faut faire tant d'opérations ?

Quand on a trouvé les Logarithmes de tous les nombres abſolus, à commencer depuis l'unité, on les range ſelon leur ſuite. Vous trouverez ici le commencement de ces Tables. Dans la premiere colomne qui eſt la plus étroite, ſont les nombres abſolus, & vis-à-vis leurs Logarithmes, qui ont été trouvés en la maniere que je l'ai dit. Tous les moyens Géométriques qu'il a fallu

trouver auparavant ne paroissent point dans ces Tables ; car cela ne sert de rien pour l'usage qu'on en veut faire.

Les Logarithmes qui sont comme les exposans des nombres absolus ou naturels, sont entr'eux arithmétiquement, ce que les nombres naturels sont entr'eux géométriquement, c'est-à-dire, par exemple, que ces trois nombres 4. *6. 9.* étant en progression Géométrique, les Logarithmes qui sont à côté de ces trois nombres sont en progression Arithmétique. Ainsi le Logarithme qui se trouvera à côté du nombre quatriéme proportionnel aux trois précédens, sera aussi un quatriéme proportionnel Arithmétique aux Logarithmes des trois nombres précédens.

CHAPITRE IV.

De l'usage des Tables des Logarithmes.

POur trouver un quatriéme terme proportionnel géométriquement, il faut multiplier, comme on l'a enseigné, le second par le troisiéme, & en diviser le produit par le premier. Si 3. *6* :: 4. on multiplie *6* par 4, & on divise 24 le produit par 3, le quotient 8 sera le quatriéme qu'on cherche. Or ces multiplications & divisions sont des opérations longues : on s'en exempte en se servant de la Table des Logarithmes. Je prens le Logarithme 6, qui est 7781512, je l'ajoute à celui de 4, qui est 6020600, cela fait 13802112, dont je retire ce nombre 4771212, qui est Logarithme de 3, le reste est 9030900, qui est un quatriéme proportionnel arithmétiquement aux trois

Logarithmes précédens. Je cherche ce nombre ou celui qui en approche le plus, à côté duquel je trouve 8, qui est ainsi le terme que je cherchois.

Outre que l'addition & la soustraction sont des opérations plus courtes que la multiplication & la division, cela seul, que le premier terme de la progression des Logarithmes est zéro, fait que les opérations sont très-courtes, ou qu'une seule suffit. Voyons-le dans un exemple. Soient ces quatre termes *a*, *b*, *c*, *d*, en proportion Arithmétique, qui représente les Logarithmes de quatre nombres. $a + d = b + c$, Livre III, n. 17. Donc si *a* étoit le Logarithme de l'unité, cette lettre ne vaudroit que zéro premier terme de la progression Logarithmétique, comme on le voit dans la Table; ainsi *d* seul est égal à $b + c$, c'est-à-dire, que le Logarithme *d* est égal à la somme des Logarithmes *b* & *c*. Ainsi, pour le trouver, il suffit d'ajouter les Logarithmes *b* & *c*, puisque leur somme lui est égale. De même si ÷ *a*. *b*. *c*. puisque $a + c = b + b$, ou $a + c = 2b$, supposant, comme on a fait, que *a* est zéro, le Logarithme *c* est le double de *b*; ainsi pour l'avoir il ne faut que doubler *b*.

Les Tables des Logarithmes abregent les opérations de l'Arithmétique, donnant le moyen de faire par l'addition ou par la soustraction ce qu'on seroit obligé de faire par la multiplication & par la division : car, par exemple, si on veut trouver le quotient d'un nombre divisé par un autre nombre de 24 divisé par 6, il n'y a qu'à prendre la différence des Logarithmes de 6 & de 24, ou retirer le plus petit du plus grand, le reste est le Logarithme du nombre qui est le quotient qu'on cherche; ce quotient est 4. Or l'unité est au quotient, comme le diviseur 6 est au nombre à divi-

ler 24 : ainſi 1. *d* :: 6. 24. Soient donc leurs Logarithmes *a*. *b*. :: *c*. *d*, puiſque *a* Logarithme de 1 eſt zéro ; donc $b+c=d$; donc $d-c=b$, c'eſt-à-dire la différence des Logarithmes de *c* & de *d*, ou le reſte du Logarithme de *d*, dont on a ôté *c*, eſt le Logarithme de *b* qu'on cherche.

Nous avons vû que la racine d'un nombre quarré eſt une moyenne proportionnelle entre ce nombre quarré & l'unité. Par exemple, 9 eſt un nombre quarré, dont la racine eſt 3, il faut que ∺ 1. 3. 9 ; d'où il ſuit que le double du Logarithme d'une racine eſt celui du nombre quarré ; & par conſéquent que la moitié du Logarithme d'un nombre quarré eſt le Logarithme de la racine de ce quarré. Car ſoient ÷ *a*. *b*. *c*. & qu'à l'ordinaire *a* ſoit zéro, pour lors $b+b=c$, donc la moitié de *c* ſera égale à la moitié de $b+b$ ou à *b*. Quand il s'agit donc d'extraire la racine quarrée d'un nombre, ce qui eſt une opération longue, il faut chercher dans la Table le Logarithme de ce nombre, dont la moitié ſera le Logarithme de la racine que l'on cherche.

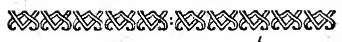
Le triple du Logarithme d'une racine cube eſt le Logarithme du cube de cette racine cube ; ainſi pour extraire la racine cube d'un nombre, au lieu de faire l'opération ordinaire encore plus longue que l'extraction des racines quarrées, il faut ſeulement prendre le tiers de ſon Logarithme ; & ce tiers eſt le Logarithme de la racine cube que l'on cherche. En voilà la démonſtration. L'unité eſt à la racine cube, comme le quarré de cette racine eſt à ſon cube. Soit donc ce nombre cube 27, dont la racine eſt 3, alors 1. 3. :: 9. 27 : ainſi ces quatre lettres qui déſignent les Logarithmes de ces quatre nombres font cette proportion Arithmétique. *a*. *b*. ∵ *c*. *d*, donc $a+d=b$

$+c$. On suppose toujours que a est zéro; partant $d=b+c$. Or on a vu que le Logarithme d'un nombre quarré vaut le double du Logarithme de sa racine; donc $c=b+b$. Ainsi substituant $b+b$ en la place de c, alors $d=b+b+b$, ou $d=3b$, qui est ce qu'il falloit prouver, que d Logarithme du nombre cube étoit le triple de b Logarithme du nombre qui est la racine du nombre cube.

Je ne dirai rien plus de l'usage des Tables des Logarithmes, qui se trouve expliqué au commencement de ces Tables, dont voilà la premiere page, que je ne propose que pour y appliquer ce que nous venons de dire, & le rendre plus intelligible. Ces Tables se trouvent par-tout.

N.	*Logarithmes.*	N.	*Logarithmes.*
1	0. 0000000	31	1. 4913617
2	0. 3010300	32	1. 5051500
3	0. 4771213	33	1. 5185139
4	0. 6020600	34	1. 5314789
5	0. 6989700	35	1. 5440680
6	0. 7781513	36	1. 5563025
7	0. 8450980	37	1. 5682017
8	0. 9030900	38	1. 5797836
9	0. 9542425	39	1. 5910646
10	1. 0000000	40	1. 6020600
11	1. 0413927	41	1. 6127839
12	1. 0791812	42	1. 6232493
13	1. 1139434	43	1. 6334685
14	1. 1461280	44	1. 6434527
15	1. 1760913	45	1. 6532125
16	1. 2041200	46	1. 6627578
17	1. 2304489	47	1. 6720979
18	1. 2552725	48	1. 6812412
19	1. 2787536	49	1. 6901961
20	1. 3010300	50	1. 6989700
21	1. 3222193	51	1. 7075702
22	1. 3424227	52	1. 7160033
23	1. 3617978	53	1. 7242759
24	1. 3802112	54	1. 7323938
25	1. 3979400	55	1. 7403627
26	1. 4149733	56	1. 7481880
27	1. 4313638	57	1. 7558749
28	1. 4471580	58	1. 7634280
29	1. 4623980	59	1. 7708520
30	1. 4771013	60	1. 7781513

N.	Logarithmes.		N.	Logarithmes.	
61	1.	7853298	91	1.	9590414
62	1.	7923917	92	1.	9637878
63	1.	7593405	93	1.	9684829
64	1.	8061800	94	1.	9731279
65	1.	8129134	95	1.	9777236
66	1.	8195439	96	1.	9822712
67	1.	8260748	97	1.	9867817
68	1.	8325089	98	1.	9912261
69	1.	8388491	99	1.	9956352
70	1.	8450980	100	2.	0000000
71	1.	8512581	101	2.	0043214
72	1.	8573325	102	2.	0086002
73	1.	8633229	103	2.	0128372
74	1.	8692317	104	2.	0170333
75	1.	8750613	105	2.	0211893
76	1.	8808136	106	2.	0253059
77	1.	8864907	107	2.	0293838
78	1.	8920946	108	2.	0334238
79	1.	8976271	109	2.	8375265
80	1.	9030900	110	2.	0473927
81	1.	9084850	111	2.	0453230
82	1.	9138139	112	2.	8492180
83	1.	9190781	113	2.	0530784
84	1.	9242793	114	2.	0569049
85	1.	9294189	115	2.	0606978
86	1.	9444984	116	2.	0644980
87	1.	9395193	117	2.	0681859
88	1.	9444827	118	2.	0718820
89	1.	9493900	119	2.	0795470
90	2.	9542425	120	2.	0791812



TRAITÉ

De la Proportion Harmonique.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'est que Proportion Harmonique.

LA Proportion Arithmétique & la Géométrique sont jointes ensemble dans la Proportion Harmonique. Pour le concevoir, voyons ce qui peut faire que les sons soient d'accord & agréables, ce qui n'arrive que lorsqu'il s'y trouve union de ces deux Proportions. Le son se fait par un trémoussement ou certain mouvement de l'air qui se communique à une membrane tendue dans l'organe de l'ouie. C'est cette impression qui nous cause le sentiment du son. Tout corps qui peut donner à l'air ce trémoussement, est sonore. Par exemple, une corde de boyau ou de léton qui est tendue fait un son lorsqu'on la pince, parce qu'elle agite l'air. En la pinçant on la tire hors de la ligne droite; ou avant que de se remettre, & d'être en repos, elle va & vient en-delà & en deçà. Ces allées & ces venues sont ce que l'on appelle des vibrations qui causent un trémoussement dans l'air, & qui par conséquent font le son.

Pour entendre ce que c'est que ces vibrations, considérez un pendule, c'est-à-dire, un fil au bout duquel pend une bale de plomb. Lorsqu'on retire

ce pendule hors de la perpendiculaire, la balle y redeſcend, paſſe au-delà, & ne s'y arrête qu'après pluſieurs allées & venues, ce qu'on nomme vibrations. Elles ſont à peu près *iſochrones*; c'eſt-à-dire, qu'elles ſe font en temps égaux : car au commencement, quand la balle va plus vîte, elle parcourt un plus grand eſpace; ſur la fin qu'elle va plus lentement, elle a moins de chemin à faire.

Les cordes des inſtrumens font de même des vibrations quand on les pince. Elles ſemblent trembler, & c'eſt en tremblant qu'elles font trémouſſer l'air, ce qui produit le ſon. L'expérience fait connoître que le ſon eſt plus grave, lorſque les vibrations ſont plus lentes : qu'il eſt plus aigu quand elles ſont plus fréquentes; ou que dans un même tems il s'en fait un plus grand nombre. Les cordes plus longues & plus groſſes, & moins tendues, ſe remuant plus lentement, leurs vibrations ſont plus tardives; auſſi leur ſon eſt plus grave. Une corde plus menue, moins longue, plus tendue, fait plus de vibrations dans un même eſpace de tems; ainſi ſon ſon eſt plus aigu.

Or trois choſes font l'agrément des ſons, la diſtinction, l'égalité, la variété. 1°. Une corde bien égale, dont les parties ſont bien unies, comme ſont celles de boyau, & plus encore celles de léton, quand elle eſt tendue, eſt plus capable de ces vibrations qui font trembler l'air; & comme ſon tremblement dure du tems, le ſon qu'elle fait ſe diſtingue bien mieux, & ſe conſerve dans une égalité, ſes vibrations étant à peu près égales pour le tems. Les oreilles ne peuvent être contentes que de ce qu'elles diſtinguent; ainſi aucun rapport qui puiſſe être entre les ſons ne leur plaît que quand il s'exprime par de petits nombres. C'eſt pour cela que les rapports Arithmétiques ſont plus propres

pour l'Harmonie, parce qu'ils ne consistent que dans une difference sensible,

2°. L'égalité des sons entre ceux que produisent les cordes d'un instrument, dépend d'un rapport de leurs vibrations. Deux cordes de même matiere, égales dans leur grosseur & dans leur longueur, & également tendues, doivent faire dans un même espace de temps un égal nombre de vibrations quand elles sont pincées de la même maniere. Aussi l'expérience montre qu'elles sont d'accord; & que si dans le temps d'une seconde, l'une fait dix vibrations, l'autre en fait un pareil nombre; & si elles sont pincées en même temps, le temps de chaque vibration de l'une doit être égal au temps de la vibration de l'autre. Des oreilles qui sentent aisément cette égalité sont donc contentes; au lieu qu'elles sont troublées, & comme inquietes, quand il n'y a aucun rapport exact, qui se puisse exprimer par nombres entre leurs vibrations, en la même maniere que ce qui est confus & sans ordre déplaît à la vue.

3°. L'égalité seroit néanmoins désagréable si la variété ne prévenoit le dégoût qu'elle pourroit causer. Il y a une variété qui s'allie avec l'égalité, & qui peut ainsi satisfaire les oreilles; car si, par exemple, après un certain intervalle de temps deux cordes commencent & finissent exactement leurs vibrations; mais que dans cet espace l'une faisant une vibration, l'autre en fasse deux; ou lorsqu'une en fait deux, l'autre en fasse trois, il est évident que la variété & l'égalité s'y rencontrent, & que leurs mouvemens s'accommodent. Les oreilles sentent & distinguent aisément cette alliance, si le rapport de leurs vibrations s'exprime avec de petits nombres; car je ne crois pas que l'oreille la plus fine pût remarquer l'accord des vibrations

de deux cordes, si dans le tems, par exemple, que l'une en fait quarante-neuf, l'autre en faisoit précisément cinquante.

C'est l'expérience qui a fait connoître que trois cordes d'instrumens également grosses & tendues, dont la longueur est comme ces trois nombres 3. 4. *6.* forment ces trois principaux accords de la musique; sçavoir; l'Octave, la Quinte, & la Quarte, quand elles sont pincées. De deux de ces cordes qui seront l'une à l'autre, comme 3 à *6*, ou 1 à 2, la plus courte fera deux vibrations dans le tems que la plus longue n'en fera qu'une, ce qui fait l'octave. De ces trois cordes, les deux qui sont l'une à l'autre, comme *6* à 4, ou 3 à 2, la plus courte fera trois vibrations contre deux de la plus longue, ou six contre quatre; c'est cet accord qu'on nomme la Quinte. Enfin deux de ces trois cordes, dont la plus courte fera quatre vibrations dans le tems que l'autre n'en fera que trois, feront, quand on les pince en même tems ou successivement cet accord, qui se nomme la Quarte.

Ainsi l'expérience a fait connoître que ces trois nombres 3. 4. *6.* expriment la proportion qui fait les principaux accords de la musique, & c'est pour cela que cette proportion se nomme *Harmonique*; car l'harmonie c'est l'accord des sons. Or remarquez en ces trois nombres que comme le premier 3 est au dernier *6*, la différence du premier & du second, c'est-à-dire, de 3 avec 4, qui est 1, est à la différence du second & du troisiéme, c'est-à-dire, de 4 & *6*, dont la différence est 2, ce qui se peut exprimer ainsi :

3. *6* :: 4—3. *6*—4.

Prenez garde à cette expression, qui est la même

que celle-ci, 3, 6 : : 1. 2. c'eſt-à-dire, que les grandeurs que ces deux expreſſions marquent, ſont les mêmes 4—3=1 & 6—4=2. Vous voyez en quels ſens ou comment la proportion Harmonique eſt composée de la proportion Arithmétique & de la proportion Géométrique. On y conſidere l'égalité de différence ; ainſi l'Arithmétique s'y trouve, & la Géométrique, puiſqu'il y a auſſi égalité de raiſons.

CHAPITRE II.

Propriétés de la Proportion Harmonique.

DEFINITIONS.

LA Proportion Harmonique arrive lorſque les nombres ſont tels que le plus petit eſt au plus grand géométriquement, comme l'excès du moyen ſur le plus petit eſt à l'excès du plus grand ſur le moyen ; ou comme la différence du premier & du deuxiéme à la différence du deuxiéme & du troiſiéme.

Ces nombres 3. 4. 6. ſont en proportion Harmonique ; car le plus petit 3 eſt la moitié de 6 le plus grand, comme l'excès du moyen 4 ſur le plus petit 3, eſt à l'excès du plus grand 6 ſur le moyen 4.

3, 6 : : 4—3. 6—4.

PREMIERE PROPOSITION.

Problême Premier.

Ces deux termes 12 & 5 d'une proportion Harmonique étant donnés, trouver le moyen.

J'appelle x ce troisiéme terme qui m'est inconnu, & que je cherche. Voilà donc les trois termes 12. 5. x de la proportion Harmonique donnée. Suivant la définition de la proportion Harmonique.

$$12 :: 12 - 5 . 5 - x.$$

ce que je puis exprimer de cette maniere, car $12 - 5 = 7$.

$$12 . x :: 7 . 5 - x.$$

Le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, liv. III. n. 67. donc

$$60 - 12x = 7x.$$

Ajoutant à ces grandeurs égales de part & d'autre $12x$; selon les regles des additions, cela produit

$$60 = 19x.$$

Et divisant ces deux grandeurs égales par 19; cela fait

$$\frac{60}{19} = x$$

Ainsi le troisiéme terme que je cherchois est $\frac{60}{19}$, c'est-à-dire, le quotient de 60 divisé par 19.

SECONDE PROPOSITION.

Théorême Premier.

Toutes les fois que la différence de deux nombres est plus grande que le plus petit des deux, on ne peut pas en montant trouver un troisiéme nombre en proportion Harmonique.

Soit 5 & 12 dont la différence 7 est plus grande

que

que 5. Soit x le troisiéme terme, je dis qu'il ne peut pas être plus grand que 12 ; car supposé que 5. 12. x. soient en proportion Harmonique ; alors

$$5 . x :: 12—5 \text{ ou } 7 . x—12.$$

Or d'autant que 7 est plus grand que 5, il faudroit que $x—12$ fût plus grand que x, ce qui est impossible, qu'une partie de x soit plus grande que toute la grandeur entiere x.

TROISIEME PROPOSITION.

Théorême Second.

Une proportion Harmonique peut diminuer à l'infini, mais non pas augmenter.

Ces trois nombres 4. 6. 12. sont en proportion Harmonique; c'est-à-dire, que

$$4 . 12 :: 6—4 . 12—6.$$

ou, ce qui est la même chose.

$$4 . 12 :: 2 . 6.$$

Il faut donc démontrer qu'on ne peut pas continuer cette proportion en l'augmentant, c'est-à-dire, trouver un troisiéme terme plus grand que 12, qui avec 6 fasse une proportion Harmonique qu'on puisse aussi augmenter. Supposons qu'on puisse trouver ce troisiéme terme : quel qu'il soit, nommons-le x. Voyons si la supposition est possible. En premier lieu, je puis ainsi exprimer cette supposition.

$$6 . x :: 12—6 . x—12.$$

Or si x est plus grand que 12, comme on le suppose, il faudroit que le même nombre 12—6 ou 6 eût un même rapport avec l'entier x qu'avec une partie de x, sçavoir avec $x—12$, ce qui est absurde. S'il est donc vrai, comme on le suppose, que $6 . x :: 12—6 . x—12.$

il faut que x le troisiéme terme soit plus petit que 12. Cette démonstration fait donc voir que la proportion Harmonique ne se peut pas augmenter à l'infini ; mais elle peut diminuer, car on peut trouver x qui sera plus petit, comme on l'a fait dans la premiere Proposition.

Quatrieme Proposition.

Troisiéme Théorême.

Trois grandeurs étant en proportion Arithmétique, les produits, 1°. de la premiere par la seconde, 2°. de la premiere par la troisieme, 3°. de la deuxiéme par la troisiéme, sont en proportion Harmonique.

Soient a, b, c, en proportion Arithmétique, après avoir multiplié, 1°. a par b, 2°. a par c, 3°. b par c, il faut prouver que ces trois produits ab, ac, bc, sont en proportion Harmonique, & qu'ainsi, selon la Définition précédente $ab . bc :: ab - ac . ac - bc$. Puisque $\div a . b . c$. donc, Liv. III. n. 19. $a + c = 2b$. Multipliant $a + c$ & $2b$ grandeurs égales par abc, les produits seront égaux. On aura ainsi une équation, dont ayant réduit les deux membres aux plus simples termes, elle se trouvera être

$$a^2bc^2 + abc^2 = 2ab^2c$$

ou

$$a^2bc - ab^2c = ab^2c - abc^2.$$

Mais $a^2bc - ab^2c$ est le produit de ab multiplié par $ac - bc$, comme $ab^2c - abc^2$ est le produit de bc & de $ab - ac$, donc ces quatre grandeurs sont proportionnelles, Liv. III. n. 70.

$$ab . bc :: ab - ac . ac - bc.$$

qui est ce qu'il falloit prouver. Car, selon la définition de la proportion Harmonique, ces trois produits, ab, ac, bc, sont en cette proportion.

COROLLAIRE.

Donc ayant trois nombres en proportion Arithmetique ÷ 6. 4. 2. *ces trois produits* 6×4, 6×2, 4×2, *ou* 24. 12. 8. *seront en proportion Harmonique.*

CINQUIEME PROPOSITION.

Théorême Quatriéme.

Si on divise la même grandeur par des diviseurs qui soient en progression Arithmétique, les quotiens de la division seront proportionnels harmoniquement.

Soit a divisé par les termes de cette progression ÷ b. $b+d$. $b+2d$. les quotiens de ces diviseurs sont $\frac{a}{b}\,\frac{a}{b+d}\,\frac{a}{b+2d}$. Soit $\frac{a}{b}=e$, & $\frac{a}{b+d}=f$, & $\frac{a}{b+2d}=g$, ainsi il faut prouver que $e.\ g :: e-f.\ f-g$ Les quotiens de la même grandeur sont entr'eux réciproquement comme les diviseurs, Liv. III. n. 85. Ainsi $e.\ f :: b+d.\ b$; partant *dividendo* $e-f.\ f :: b+d-b.\ b$; puisque $+b-b=$ zéro. Donc

$$e-f.\ f :: d.\ b.$$

par le même raisonnement.

$f.\ g :: b+2d.\ b+d$. Donc *convertendo*:

$f.\ f-g :: b+2d.\ b+2d-b-d.$

Or $b+2d-b-d=d$, donc

$$f.\ f-g :: b+2d.\ d.$$

On vient de voir que $e-f.\ f :: d.\ b.$

donc *ex proportione perturbatâ*, Liv. III. n. 73;

$e-f.\ f-g :: b+2d.\ b.$

Or $e.\ g :: b+2d.\ b$: car, comme on vient de le

voir, e est le quotient de a divisé par b comme g est le quotient de a divisé par $b+2d$: donc les quotiens de la même grandeur étant entre eux réciproquement comme les diviseurs, Liv. III. n. 74. $e. g :: b+2d. b :: e-f. f-g$. donc $e. g :: e-f. f-g$; qui est ce qu'il falloit démontrer.

Corollaire.

Divisant ce nombre 60 par cette progression Arithmétique, 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. les quotiens seront en proportion Harmonique.

Les quotiens sont 60. 30. 20. 15. 12. 10. qui, par le Théorême précédent, doivent être en proportion Harmonique, ainsi ils sont une progression Harmonique ; car 60. 20 :: 60—30. 30—20 ; & 30. 15 :: 30—20. 20—15 ; & 20. 12 :: 20—15. 15—12 ; & 15. 10 :: 15—12. 12—10. Ces nombres sont donc une progression Harmonique.

Si on vouloit avoir une plus longue progression Harmonique, il faudroit continuer la progression Arithmétique ; & si elle avoit sept termes, multiplier 60 par 7, ce qui feroit 420, lequel nombre divisé par les sept termes de la progression Arithmétique donneroit une nouvelle progression Harmonique sçavoir 420. 210. 140. 105. 84. 70. 60. Vous voyez que c'est-là une autre progression, qui continue la premiere, mais en descendant, comme nous avons vû que cela se pouvoit faire.

TRAITÉ

Des Combinaisons & des changemens d'ordre.

CHAPITRE PREMIER.

Ce que c'est que Combinaison. Comment on trouve toutes les Combinaisons possibles de deux & de plusieurs choses.

LE mot de Combinaison ne signifie proprement que la maniere de prendre plusieurs choses deux à deux, & de trouver toutes les différentes dispositions qu'elles peuvent avoir ainsi prises. Mais on donne une signification plus étendue à ce mot. On entend la maniere de trouver généralement toutes les dispositions que peuvent avoir, soit deux, soit plusieurs choses, selon qu'on les voudra prendre, non-seulement, deux à deux, mais trois à trois, quatre à quatre, & de quelqu'autre façon, en les ajoutant, en les multipliant, selon qu'il sera nécessaire. Changement d'ordre, c'est lorsque l'on change leur ordre de la maniere dont nous donnerons des exemples, après avoir expliqué les combinaisons.

Les Combinaisons sont d'usage dans une infinité de rencontres. Souvent, pour ne se point tromper, il faut faire des dénombremens exacts. La difficulté est d'être assuré de cette exactitude, c'est-à dire, que rien n'a échappé ; ce qu'on obtient par le

secours des Combinaisons. Voilà en quoi consiste tout leur art. Comme, dans toute l'Arithmétique, il faut, 1°. *Faire par partie ce qu'il seroit impossible de faire tout d'un coup, en ne commençant que par des Combinaisons fort simples.*

2°. *Il faut faire avec ordre les premieres Combinaisons.*

3°. *Il faut tirer des conséquences de ce qu'on a découvert en faisant les premieres Combinaisons.*

Un exemple rendra sensibles ces trois Regles auxquelles je réduis tout l'art des Combinaisons. On verra comme les premieres Combinaisons simples & aisées font découvrir tout ce qu'on peut sçavoir des Combinaisons composées, sans qu'on soit obligé de les faire.

On propose de connoître le nombre de tous les mots possibles qu'on peut faire des vingt-quatre lettres de l'Alphabet, faisant les uns de deux lettres, les autres de trois, les autres de quatre, jusqu'à les faire de vingt-quatre lettres. Cette proposition paroît d'abord fort difficile, & cependant il est facile de la résoudre en suivant les trois regles qu'on vient de donner. Car premierement je n'entreprendrai pas de faire la chose tout d'un coup. & je ne commencerai que par des Combinaisons aisées. Je verrai donc combien on peut faire de mots de deux lettres; ce que je ferai par parties; car je n'examinerai d'abord qu'en combien de manieres chaque lettre peut être combinée avec les autres lettres. En second lieu, suivant la seconde regle, je garderai un ordre naturel; car puisque la lettre *a* est la premiere de l'Alphabet, je commencerai par elle ces Combinaisons, & je suivrai l'ordre des lettres. Il me sera donc facile de trouver qu'on peut combiner la lettre *a* avec les 24 de

l'Alphabet en 24 manieres que voilà : *aa, ab, ac, ad, ae, af, ag, ah, ai, ak, al, am, an, ao, ap, aq, ar, as, at, au, ax, ay, az, a&.*

Maintenant je dois faire ce que la troisiéme regle m'avertit de faire, qui est de considérer cette premiere Combinaison, qui est très-simple, d'y faire attention, & de voir ce que j'en puis conclure. Il est évident que ce que j'ai fait en commençant par *a*, je le puis faire en commençant par *b*, c'est-à dire, combinant *b*, la seconde lettre, avec les 24 lettres, suivant le même ordre, disant : *ba, bb, bc, &c.* par conséquent puisque chaque lettre se combine en 24 manieres différentes, où elle tient toujours la premiere place, on peut donc faire vingt-quatre fois vingt-quatre, c'est-à-dire, 576 Combinaisons différentes, ou mots de deux lettres. Ainsi cette premiere Combinaison simple & aisée de *a* avec les lettres de l'Alphabet me fait découvrir le nombre de tous les mots de deux lettres; & je vois bien que, s'il les falloit tous écrire, je le pourrois faire sans qu'il m'en échappât un.

Cette premiere & seule Combinaison me donne encore une plus grande connoissance, & pour le dire en un mot, elle me fait connoître tout ce que je cherche. Car, pour trouver tous les mots de trois lettres, je n'ai qu'à garder le même ordre, combinant chacun de ces mots de deux lettres avec chacune des vingt-quatre lettres. Par exemples, comme le premier mot étoit *aa*, disant *aaa, aab, aac, &c.* d'où il est évident que comme je combinerai chaque mot de deux lettres en 24 manieres différentes, les combinant avec les 24 lettres de l'Alphabet, le nombre des mots de trois lettres sera vingt-quatre fois plus grand que celui des mots de deux lettres, ainsi multipliant 576

par 24; ce qui fait 13824, j'aurai le nombre des mots de trois lettres, sans faire aucune Combinaison.

Il n'en faut pas davantage, car j'apperçois qu'en combinant chacun de ces mots de trois lettres avec les 24 lettres, gardant toujours le même ordre, disant par exemple, *aaaa*, *aaab*, *aaac*, *&c.* le nombre de mots de quatre lettres doit être 24 fois plus grand; ce qui me découvre une proportion ou progression qui regne ici; sçavoir, que le nombre des mots de quatre lettres sera 24 fois plus grand que celui des mots de trois lettres: que le nombre des mots de cinq lettres sera 24 fois plus grand que celui des mots de quatre lettres; & qu'ainsi ces Combinaisons augmentent dans une même proportion. On peut donc connoître tout d'un coup, après avoir fait cette premiere Combinaison simple, combien, par exemple, il y auroit de mots faits de 13 lettres; &, si l'on veut, quel seroit le nombre de toutes les Combinaisons ensemble. Car une progression étant donnée, connoissant le premier terme & la raison qui y regne, il est facile de connoître quelqu'autre de ses termes qui soit proposé, & la somme de tous les termes.

Ce seul exemple suffit pour comprendre l'art des Combinaisons. On trouve toujours de la même maniere une certaine proportion qui regne. On la découvre d'abord lorsqu'on commence par les Combinaisons les plus simples, & qu'on suit un ordre naturel. Voyons-le dans ce second exemple. On demande en combien de manieres on peut combiner les dix premiers chiffres 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. en les prenant deux à deux, après trois à trois, continuant jusqu'à dix. La valeur des chiffres dépendant de leur place, il faut bien

considérer, en les combinant, qu'ils gardent la même place; 12 & 21 ne sont pas une même chose. Ainsi commençant la Combinaison par 1, il faut le mettre à la premiere place; & on trouvera d'abord que le nombre de ces combinaisons sera une progression dans laquelle regne la raison décuple.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	0.
11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	10.

Vous voyez que les dix premiers chiffres pris seuls sont le premier terme de cette progression. Le chiffre 1 combiné avec chacun de ces dix chiffres fait dix Combinaisons; partant chacun des dix étant ainsi combinés,

21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 20.

combinant, dis-je, tous les autres chiffres en la même maniere, cela fera cent Combinaisons.

Cela seul vous fera connoître que les dix chiffres de la même maniere trois à trois, feront mille Combinaisons. Ainsi tout d'un coup on voit le nombre des Combinaisons que ces dix chiffres peuvent faire, pris, par exemple, sept à sept; & quel est le nombre de toutes les Combinaisons, qui sera la somme d'une progression. Par des chiffres on peut entendre quelque chose qu'on voudra; & on voit comment, quel que soit leur nombre, il est facile d'en trouver toutes les Combinaisons possibles.

Chapitre II.

Les Combinaisons se font différemment, selon la fin pour laquelle on les fait.

ON peut avoir différentes vues en faisant les Combinaisons ; les unes sont inutiles à la fin qu'on se propose, & celles-là doivent se connoître pour les exclure, ou pour les éviter, afin qu'elles ne brouillent point. Des exemples feront comprendre ce qu'on veut faire remarquer ici. En même tems on verra comme les combinaisons sont d'usage dans des choses même qui semblent n'avoir aucune liaison avec les Mathématiques. On appelle *syllogisme* un raisonnement composé de trois proportions, qui sont nécessairement ou des proportions universelles affirmatives, comme est celle ci, *Tous les hommes sont mortels ;* ou des propositions universelles négatives, comme celle-ci, *Aucun homme n'est immortel* ; ou ces propositions sont particulieres & affirmatives, comme *il y a des hommes sçavans ;* ou enfin ces propositions sont particulieres négatives, *il y a des hommes qui ne sont pas raisonnables.* On marque avec ces quatre voyelles *A. E. I. O.* la qualité de ces propositions. *A* marque une proposition universelle affirmative, E une proposition universelle négative, *I* une proposition particuliere affirmative, *O* une proposition particuliere négative. Or cette affirmation ou négation, universalité ou particularité des trois propositions, dont un syllogisme est composé, est ce qu'on appelle *mode d'un syllogisme*,

lequel mode se marque avec trois de ces quatre voyelles. Si ces Propositions sont toutes universelles affirmatives, son mode sera *A A A*. Ainsi pour sçavoir combien on peut faire de différens syllogismes quant à cette qualité de leurs trois propositions, il faut voir en combien de manieres on peut combiner ces quatre voyelles *A. E. I. O.* prenant trois de ces voyelles à la fois; par exemple, *AAA*, *AAE* ou *AAI*, *AAO*. Vous voyez devant vos yeux toutes ces combinaisons, & l'ordre que j'ai tenu.

1. Aaa.	17. Eee.	33. Iii.	49. Ooo.
2. Aea.	18. Eae.	34. Iai.	50. Oao.
3. Aia.	19. Eie.	35. Iei.	51. Oeo.
4. Aoa.	20. Eoe.	36. Ioi.	52. Oio.
5. Aee.	21. Eaa.	37. Iaa.	53. Oaa.
6. Aii.	22. Eii.	38. Iee.	54. Oee.
7. Aoo.	23. Eoo.	39. Ioo.	55. Oii.
8. Aae.	24. Eea.	40. Iia.	56. Ooa.
9. Aai.	25. Eei.	41. Iie.	57. Ooe.
10. Aao.	26. Eeo.	42. Iio.	58. Ooi.
11. Aei.	27. Eai.	43. Iae.	59. Oae.
12. Aeo.	28. Eao.	44. Iao.	60. Oai.
13. Aie.	29. Eia.	45. Iea.	61. Oea.
14. Aio.	30. Eio.	46. Ieo.	62. Oei.
15. Aoe.	31. Eoa.	47. Ioa.	63. Oia.
16. Aoi.	32. Eoi.	48. Ioe.	64. Oie.

J'ai suivi celui de l'Alphabet; & commençant par *A*, j'ai trouvé seize Combinaisons, dans lesquelles *A* tient la premiere place; ainsi je vois que puisqu'il y a quatre voyelles *A. E. I. O.* il doit y avoir quatre fois seize ou soixante-quatre Combinaisons. Il peut donc y avoir soixante-

quatre différens syllogismes. C'est aux Philosophes qui enseignent l'art de raisonner, d'examiner si tous ces soixante-quatre modes sont bons. Ils établissent des regles, selon lesquelles, par exemple, on ne peut rien conclure de deux propositions négatives : ainsi ces modes *EEE*, *EOE* & semblables, ne sont pas concluans. De deux propositions particulieres on ne peut non plus rien conclure ; & jamais la derniere proposition ne peut être plus étendue que les premieres. Suivant ces regles & quelques autres, un Logicien peut marquer les syllogismes qui sont bons ou mauvais, & traiter avec la clarté & l'exactitude des Mathématiques cette matiere.

Voyons la même chose dans l'exemple suivant, & comment on doit exclure les Combinaisons inutiles au dessein pour lequel on les fait. On demande en combien de manieres se peuvent combiner les sept Planettes. La chose seroit aisée, si c'étoit toutes les combinaisons possibles qu'on cherchât. Désignons premierement les sept Planettes par les sept premieres lettres de l'Alphabet. *a* marque le Soleil, *b* la Lune, ainsi de suite. Si on combine *a* avec lui-même & avec les autres lettres suivantes, cela fera ces sept Combinaisons. *aa. ab. ac. ad. ae. af. ag.* combinant de même chacune des sept Planettes, cela fera sept fois sept, c'est-à-dire, 49 Combinaisons. Si on combinoit *aa* premierement avec lui-même, *aaa*, *aab*, *aac*, & qu'on fît la même chose des 49 Combinaisons précédentes, on en trouveroit sept fois quarante-neuf, c'est-à-dire, 343 ; ce qui montre que ces Combinaisons font une progression dont la raison est septuple. Mais toutes ces Combinaisons ne sont pas utiles, si l'on demande que la même Planette ne se trouve point deux fois

dans une même Combinaiſon, ou qu'on ne la combine point avec elle-même; qu'ainſi il faille exclure des Combinaiſons qu'on cherche, ces Combinaiſons *aa. bb. cc. &c.* On peut auſſi demander que celles qui ont les mêmes lettres ne ſoient comptées que pour une; que, par exemple, *ab* & *ba* ne ſoient pas comptées pour deux différentes Combinaiſons, comme effectivement le Soleil & la Lune, & la Lune & le Soleil ne ſont qu'une même choſe. Alors le nombre des Combinaiſons ſera bien plus petit; car en premier lieu il faudra exclure ces ſept Combinaiſons, où une lettre eſt combinée avec elle-même, comme *aa. bb. cc. &c.* Ainſi de 49 il en faut déja retrancher 7, reſte 42. Or dans celles qui reſtent ſe trouvent encore *ab* & *ba*, *ac* & *ca*, *&c.* qui ne peuvent être priſes que pour une Combinaiſon, il en faut donc retrancher la moitié; ainſi de 42 il ne reſte que 21 Combinaiſons des ſept Planettes, les prenant deux à deux, ſelon les conditions propoſées.

Voici la maniere d'exclure toutes les Combinaiſons qu'on regarde ici comme inutiles. Puiſqu'on ne peut pas combiner chaque Planette avec elle-même, je ne dois combiner *a* la premiere qu'avec les ſix lettres ſuivantes; ce qui ne fait donc que ſix Combinaiſons. Venant à combiner *b*, comme cette lettre a déja été combinée avec *a*, je ne la puis combiner qu'avec les cinq dernieres lettres. Je ne ferai donc que cinq combinaiſons différentes. Par la même raiſon la troiſiéme lettre *c* ne peut être combinée qu'avec quatre, la quatriéme *d* qu'avec trois, la cinquiéme qu'avec deux, la ſixiéme qu'avec une, la ſeptiéme ſe trouve déja dans les combinaiſons précédentes. Ainſi il n'y a d'utiles que ces Combinaiſons qui ſont cette progreſſion.

$+6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1.$

La somme de cette progression est 21.

Pour combiner les Planettes trois à trois, il faut combiner ces 21 combinaisons trouvées ou $6+5+4+3+2+1$. Mais comme je ne puis pas combiner *a* avec soi-même, & qu'il se trouve dans les six premieres Combinaisons, je ne le combine qu'avec les combinaisons suivantes, qui sont $5+4+3+2+1$, ce qui ne fait que 15 nouvelles Combinaisons. *b* se trouve aussi dans six Combinaisons, sçavoir, *ab. cb. db. eb. fb. gb.* & dans ces cinq autres, sçavoir, *bc. bd. be. bf. bg.* Je n'en puis donc faire de nouvelles Combinaisons qu'avec $4+3+2+1$, ce qui fait 10.

Par les mêmes raisons je ne puis combiner *c* qu'avec $3+2+1$, ce qui fait 6. & *d* qu'avec $2+1$, & *e* qu'avec $+1$. Ainsi ces Combinaisons des sept Planettes prises trois à trois ne font que $15+10+6+3+1$; ce qui fait trente-cinq.

Par cette méthode on trouvera qu'on ne peut faire que 35 Combinaisons des sept Planettes les prenant quatre à quatre, 21 si on les prenoit cinq à cinq, 27 si on les prenoit six à six; & une seule Combinaison si on les prend toutes sept; car, dans cette seule Combinaison, *a b c d e f g*, elles se trouvent toutes; ainsi il ne peut pas y avoir d'autres Combinaisons de ces sept lettres. Toutes les Combinaisons des sept Planettes deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, ainsi de suite jusqu'à ce qu'on les prenne toutes sept, sont donc au nombre de 120, qui se pourroit trouver tout d'un coup par le moyen d'une progression, ce qu'il faut voir, & ce qui prouvera ce que nous avons dit, qu'en faisant les Combinaisons avec ordre,

on découvre des progressions qui abregent l'opération.

Une seule chose ne peut se prendre qu'une fois séparément de toute autre. Deux choses, comme *a* le Soleil, & *b* la Lune, ne se peuvent joindre que d'une maniere; car *ab* & *ba* ne sont pas deux conjonctions différentes. Si nous ajoutons *c* une troisiéme Planette, ces trois Planettes *a. b. c.* pourront faire quatre conjonctions, *ab*, *ac*, *bc*; & cette quatriéme *abc*, qui comprend ces trois Planettes. Quatre Planettes peuvent faire ces onze conjonctions que voilà : *ab. ac. ad. bc. bd. cd. abc. abd. acd. bcd. abcd.* Quand on prend les Planettes séparément, cela s'appelle leur disjonction. Or si on ajoute au nombre de leurs conjonctions celui de leurs disjonctions : par exemple, à celui de la conjonction de deux Planettes, qui est 1, ce nombre 2 de leurs disjonctions; de même qu'on ajoute à 4, qui est le nombre des conjonctions de trois Planettes, celui de leurs disjonctions qui est 3; & à 11 celui de la conjonction de quatre Planettes, celui de leurs disjonctions, qui est 4, vous aurez ces nombres :

1. 3. 7. 15.

Ajoutez-y l'unité, & viendra :

2. 4. 8. 16.

Ces nombres font une progression dans laquelle regne la raison double. Nous avons vû qu'on pourroit trouver 120 conjonctions des Planettes toutes différentes. Ajoutez à ce nombre 120, leurs disjonctions, qui sont 7, cela fera 127. Or ayant ôté l'unité de chacun des termes cette progression double.

∺ 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128.

viendront ces nombres;

1. 3. 7. 15. 31. 63. 127.

Ainſi vous voyez que le ſeptiéme terme de cette ſuite de nombres donne toutes les conjonctions & disjonctions poſſibles des ſept Planettes.

Il ſemble que cela ne s'accorde pas avec ce que nous avons dit ci-deſſus, qu'il y avoit 21 Combinaiſons des ſept Planettes priſes deux à deux, 35 quand elles ſont priſes trois à trois, &c. mais dans ces combinaiſons nous les prenions toutes ſept. Nous combinions, par exemple, *a* avec les ſix autres ; au lieu que dans ces Combinaiſons dont le nombre eſt exprimé par ces nombres 1. 3. 7. 15. &c. on conſidere les Planettes, en premier lieu, comme s'il n'y en avoit que deux ; enſuite qu'il n'y en eût que trois. Mais de quelque maniere qu'on faſſe ces Combinaiſons, toutes les conjonctions & disjonctions poſſibles des ſept Planettes ou des ſept choſes font toujours préciſément 127. Nous avons trouvé 120 Combinaiſons ; ajoutez les ſept disjonctions, cela fait ce nombre 127.

CHAPITRE III.

Des changemens d'ordre.

IL eſt auſſi utile de conſidérer comment on peut découvrir tous les changemens poſſibles d'un certain nombre de choſes ; par exemple, en combien de manieres différentes on pourroit changer l'ordre de dix perſonnes aſſiſes à une même table. Il ne faut point d'autres regles que celles que j'ai propoſées pour les Combinaiſons.

1°. *Il faut commencer par examiner les changemens les plus ſimples.*

2°. Observer un ordre dans cet examen.

3°. Reconnoître s'il n'y a point quelque espece de proportion, laquelle étant trouvée, on puisse juger par les premiers changemens simples & faciles, de tous ceux qui sont plus composés.

Je me sers des lettres de l'Alphabet, dont je suis l'ordre. Une seule lettre comme *A* ne peut pas recevoir de changement. Quand on la joint avec une seconde lettre, comme *A* avec *B*, puisqu'on peut mettre *B* devant ou après *AB* ou *BA*, cela fait deux changemens; ainsi deux lettres se peuvent changer en deux manieres. Si j'ajoute une troisiéme lettre C: comme on peut mettre C dans trois places de *AB*; sçavoir, ou au commencement *ABC*; ou au milieu *ACB*: ou à la fin *ABC*; & qu'on peut faire la même chose dans *BA*, plaçant *C* en trois endroits, ou au commencement, ou au milieu, ou à la fin, *CBA*, *BCA*, *BAC*, comme vous le voyez.

ABC,	*BAC*,	*CBA*,
ACB,	*BCA*,	*CAB*.

Je connois que je puis disposer trois lettres, & par conséquent trois choses en six manieres. Si j'ajoute *D*, une quatriéme lettre, comme en chacun des six changemens dont trois lettres sont capables, il y a quatre places où je puis mettre *D*, par exemple, dans *ACB*, je puis mettre *D* en quatre endroits differens, écrivant ou *D A C B*, ou *A D C B*, ou *A C D B*, ou *A C B D*. Si, dis je, j'ajoute une quatriéme lettre, ces 4 lettres, & partant 4 choses, seront capables de 4 fois 6 differens changemens, c'est-à-dire de 24 changemens. Il n'en faut pas davantage pour me faire appercevoir que cinq choses seront capables de 5 fois 24 changemens, c'est-à-dire, de 120; que multi-

pliant 120 par 6, ce produit 720 sera le nombre des changemens de 6 lettres: & 5040, produit de 720 par 7, le nombre des changemens de 7 lettres: 40320, produit de 5040 par 8, le nombre de changemens de 8 lettres: 362880 produit de 40320 par 9, le nombre des changemens de 9 lettres; & qu'enfin 3628800 produit de 362880 par 10 est le nombre des changemens possibles de dix lettres, & par conséquent de dix hommes assis à une même table.

La regle générale, c'est d'écrire les termes de la progression naturelle. Chacun de ces termes marquera le nombre des choses ou des lettres, dont on cherche les différens changemens. Sous cette progression il faut ranger les continuels produits des termes de dessus, comme vous le voyez.

÷ 1.	2.	3.	4.	5	6.	7.	8.	9.
1.	2.	6.	24.	120.	720.	5040.	40320	362880.

Le produit des deux termes naturels 1 & 2, c'est 2; ce produit multiplié par le troisiéme terme, c'est 6 que j'écris sous 3; ce 6 me fait connoître que trois choses reçoivent 6 changemens. Je multiplie le produit 6 par 4, j'en écris le produit 24 sous 4. Ensuite je multiplie 24 par 5, & j'écris 120 le produit sous 5. Je continue de même; je trouve, par exemple, que six choses peuvent changer en 720 manieres différentes. Ainsi pour connoître de combien de changemens sont capables 7 lettres, je n'ai qu'à multiplier 720 par 7, & le produit 5040 est le nombre de ces changemens.

Ceci peut servir à trouver tous les changemens possibles des lettres du nom d'une personne, de maniere qu'elles fassent un autre nom qui ait un sens obligeant ou satyrique, selon qu'on veut louer ou blâmer. C'est ce qu'on appelle faire des *Anagram-*

mes ; dont l'art ne confiste qu'à trouver tous les changemens possibles des lettres d'un nom. On les compte, & aussi-tôt on connoît combien elles peuvent recevoir de différens changemens. Vous pourrez remarquer la différence qu'il y a entre les Combinaisons & changemens d'ordre. Proprement combiner, c'est un certain nombre de choses étant donné, les prendre les unes après les autres, ou deux à deux ou trois à trois. Dans le changement d'ordre, on ne fait que changer la place des choses qui sont proposées. Quand la même lettre se trouve plusieurs fois dans un nom, on lui donne différentes figures; comme en ce nom *Jesus*, où il y a deux *s*, il en faut faire une italique & l'autre romaine, ou l'autre majuscule & l'autre petite; pour les distinguer. Ces cinq lettres reçoivent 120 changemens, ainsi on peut faire autant de noms parmi lesquels on choisit ceux qui signifient quelque chose. Quand le nombre des choses dont on cherche les changemens est grand, ce nombre est prodigieux; par exemple, celui des changemens des dames d'un damier, & des piéces d'un jeu d'échecs. Qui le croiroit, s'il n'y en avoit démonstration, que dix hommes assis à une même table peuvent changer de place en 3628800 manieres différentes.

On peut faire plusieurs questions sur le changement d'ordre; par exemple, celle-ci: En combien de manieres on peut changer l'ordre des mots de ce Vers Latin.

Tot tibi sunt dotes, virgo, quot sidera cælo.

de sorte que ce soit toujours un Vers Latin. Pour entendre le détail de ce qu'on doit faire, il faut avoir quelque connoissance de la Poésie latine, & je n'écris que pour des François. Ceux qui sçavent

les regles de cette Poésie, & qui garderont les regles que nous avons données pour les Combinaisons & les changemens d'ordre, trouveront aisément en combien de manieres ce Vers se peut changer sans perdre sa mesure; ou de sorte que ce soit toujours un Vers Latin, dont le cinquiéme pied soit, comme il le doit, un *dactile*, & le sixiéme un *spondée*. Ainsi comme dans ce Vers, il n'y a que ces dactiles *sidera* & *tot tibi*, ou *sunt tibi*, ou *quot tibi*, il faut que *sidera* ou *tibi* se trouvent toujours au cinquiéme pied.

Tot tibi sunt dotes, virgo, quot sidera cælo.
Sidera quot cælo, tot dotes sunt tibi, virgo.

En changeant ainsi l'ordre de ces mots, on peut faire un nombre infini de différens Vers, dont chacun ne sera composé que de ces mots. Mais dans les uns le dernier pied sera *cælo*, dans l'autre *virgo*; l'un aura au cinquiéme *sidera*, l'autre *tot tibi*. Tous auront quelque différence, quelqu'ordre particulier. Le Pere Prestet *, dans la premiere édition de ses Elémens, compte 2196 changemens possibles des mots qui composent ce Vers. Dans la seconde il en trouve 3276, & ainsi de ce seul Vers on en peut faire ce grand nombre de différens Vers, qui seront tous composés des mêmes mots, & qui ne différeront entr'eux, que parce que ces mots seront différemment placés.

* Encore le Pere Prestet s'est-il trompé pour la seconde fois, car M. Jacques Bernoulli en a trouvé 3312, sans compter les Vers spondaïques.

CHAPITRE IV.

Moyens de trouver une combinaiſon dont le rang eſt donné dans une ſuite de plusieurs combinaiſons ; ou, la Combinaiſon étant donnée, trouver ſon rang. Application de ces moyens à la Période Julienne.

CEs moyens ſont utiles dans les occaſions. Voyons-le dans l'application que nous en allons faire à la Période Julienne. Cette Période eſt faite de la multiplication de ces trois Cycles : du Solaire de 28 ans, du Lunaire de 19, & de l'Indiction qui eſt une révolution de quinze années. Cette période eſt une combinaiſon de ces trois Cycles dont je marque les années avec des lettres que vous voyez. Je combine 1°. le Cycle Solaire avec le Cycle Lunaire, combinant A avec a & avec toutes les 19 lettres du Cycle Lunaire, Cela fait 19 Combinaiſons. Combinant enſuite B & toutes les 28 lettres du Cycle Solaire avec les 19 du Cycle Lunaire, cela fait vingt-huit fois dix-neuf Combinaiſons ; c'eſt-à dire, 532 toutes différentes. Combinant enſuite ces 532 Combinaiſons avec les 15 lettres du Cycle des Indictions, cela fait quinze fois cinq cens trente-deux, ou 7980 Combinaiſons différentes. On pourroit augmenter ce nombre de Combinaiſons, ſi on comptoit les changemens d'ordre, comme ſeroient E a & a A & A a A : mais ce ne ſont pas différentes choſes, non plus que celles-ci K b *D* & b K *D* ou *D* b K. Car il eſt évident que dire le 10. du Cycle Solaire, le ſecond du Cycle

Lunaire, c'eſt la même choſe que ſi on commençoit par le Lunaire, diſant le ſecond du Cycle Lunaire, le 10 du Solaire.

Cycle Solaire.		*Cycle Lunaire.*		*Cycle des Indictions.*	
A	1	a	1	*A*	1
B	2	b	2	*B*	2
C	3	c	3	*C*	3
D	4	d	4	*D*	4
E	5	e	5	*E*	5
F	6	f	6	*F*	6
G	7	g	7	*G*	7
H	8	h	8	*H*	8
I	9	i	9	*I*	9
K	10	k	10	*K*	10
L	11	l	11	*L*	11
M	12	m	12	*M*	12
N	13	n	13	*N*	13
O	14	o	14	*O*	14
P	15	p	15	*P*	15
Q	16	q	16		
R	17	r	17		
S	18	ſ	18		
T	19	t	19		
V	20				
X	21				
Y	22				
Z	23				
β	24				
γ	25				
δ	26				
ζ	27				
θ	28				

La Période Julienne eſt une ſuite de 7980 combinaiſons différentes. Chacun de ces trois Cycles

étant révolu, il recommence. Par exemple, l'année 28 du Cycle Solaire est suivie de la premiere année du même Cycle. Ainsi du Cycle Lunaire & du Cycle des Indictions. Ces trois Cycles commencent & finissent sans que dans toute la Période qui est de 7980 Combinaisons, deux années ayent les mêmes Cycles.

QUESTION.

Une année des 7980 de la Période Julienne étant donnée, trouver quels sont les Cycles de cette année, & par conséquent la Combinaison caractéristique de cette année.

IL est évident que rejettant autant qu'on le peut un Cycle entier de l'année proposée, ce qui reste est l'année du Cycle qu'on cherche. Si, par exemple, de l'année 4714 de la Période Julienne, on rejette autant qu'on le peut le Cycle Solaire 28, ce nombre 10 qui restera sera l'an du Cycle Solaire de cette année 4714; puisqu'après 28 années le Cycle Solaire recommence toujours.

Or pour rejetter un Cycle autant qu'on le peut, & trouver ce qui reste, il faut diviser l'année proposée par le Cycle entier. Ce n'est pas le quotient de cette division qu'on cherche. Mais c'est parce que, s'il ne reste rien, la division faite, on connoît que c'est la derniere année du Cycle entier. S'il reste quelque chose, ce reste est l'année particuliere du Cycle entier. Ainsi pour trouver les trois Cycles de l'année 4714, il en faut tirer les Cycles 28. 19. & 15. ce qui se fait divisant ce nombre 4714. par ces Cycles, 1°. par 28, pour connoître quel étoit le Cycle Solaire de cette année 4714. La division faite, le reste qui sera 10 donnera ce

Cycle; de même, pour connoitre quel sera le Lunaire de la même année, il faut diviser 4714 par 19, le reste 2 sera le Cycle Lunaire de cette année; enfin, en le divisant par 15, le reste 4 marquera que l'Indiction étoit 4. Prenant ensuite les lettres qui sont vis à-vis des années 10. 2. 4. en chaque Cycle, on trouvera cette Combinaison *K b D*, qui ne se trouve que dans cette année 4714.

La premiere année de l'Ere Chrétienne a ces mêmes Cycles; partant cette premiere année convient avec l'année 4714. de la Période Julienne, qui est ainsi nommée, parce qu'on la joint avec nos années qui ont été réglées par Jules Cesar; d'où elles ont été appellées les années Juliennes. On trouve ainsi les Cycles de toutes les autres années de la Période Julienne, qui seront données.

On pourroit aussi proposer cette question, les années de chaque Cycle étant données, trouver l'année de la Période Julienne, à laquelle ils conviennent. Par exemple, on suppose qu'on sçache qu'une certaine année avoit 10 de Cycle Solaire, 2 de Cycle Lunaire, & 4 d'Indiction, on demande quelle est l'année de la Période Julienne à laquelle conviennent ces trois Cycles. Ce Problême se trouve résolu dans plusieurs Livres de Mathématiques. Comme il a quelque difficulté, & que mon but n'est que de donner des Elémens faciles, je n'en parlerai point ici. Ceux qui auront bien compris ces Elémens, auront une introduction pour entendre des Livres plus difficiles que le mien, & pénétrer, s'ils le souhaitent, plus avant dans des sciences qui méritent fort d'être cultivées.

FIN.